Matematica dei frattali I

Un'introduzione elementare

Andrea Centomo
Liceo "F. Corradini" di Thiene

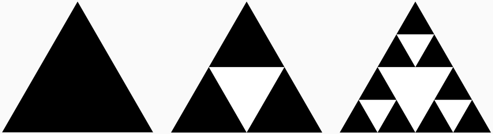
Padova, 2 luglio 2019

Tavola dei contenuti

Insiemi autosimili piani

Il setaccio di Sierpinski

Sia K_0 (compatto) un triangolo equilatero (nero) di lato $L > 0$.

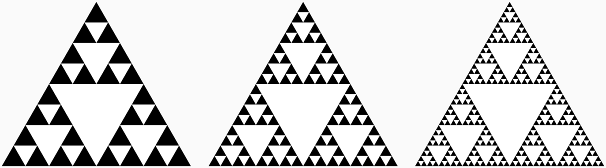


Procediamo come segue:

1. divido K_0 in quattro triangoli equilateri di lato $L/2$;
2. coloro di bianco l'interno del triangolo equilatero centrale e chiamo K_1 l'insieme piano di colore nero;
3. per ciascuno dei tre triangoli neri che formano K_1 ripetiamo quanto visto ai punti 1. e 2. ottenendo K_2.

Iterazioni

Vediamo cosa succede andando avanti ancora



Iterando *ad infinitum* si ottiene il setaccio di Sierpinski K_∞.

Noto che:

1. K_∞ è compatto e connesso;
2. K_∞ ha area nulla e frontiera di lunghezza infinita.

Iterated Function System

In $\mathbb{R}^2$ consideriamo le tre similitudini

$$f_1 = \frac{1}{2}A_0 \quad f_2 = \frac{1}{2}t_{\mathbf{u}} \circ A_0 \quad f_3 = \frac{1}{2}t_{\mathbf{v}} \circ A_0$$

dove A_0 è la matrice identica, $\mathbf{u} = (1/2, 0)$ e $\mathbf{v} = (1/4, \sqrt{3}/4)$.

K_∞ è l'attrattore dell'IFS $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, f_3\}$ e si ha

$$K_\infty = \bigcup_{i=1}^{3} f_i(K_\infty).$$

Inoltre

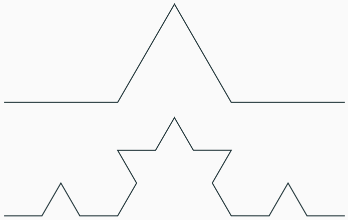
- K_∞ **non** dipende da K_0 (non ovvio)
- K_∞ è un insieme piano autosimile.

La curva di Koch

La curva di Koch è l'attrattore generato dall'IFS:

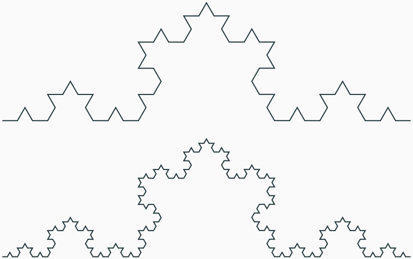
$$f_1 = \frac{1}{3}A_0 \qquad f_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{3}t_{\mathbf{u}} \circ A_\alpha$$

$$f_3 = \frac{1}{3}t_{\mathbf{2u}} \circ A_{2\alpha} \qquad f_4 = \frac{1}{3}t_{\mathbf{2u}} \circ A_0$$



Esercizio. Trovare **u** e α.

Osservazioni



Iterando... ottengo la curva di Koch C_∞:

1. compatta, connessa e autosimile;
2. con area nulla e lunghezza infinita (dimostrarlo).

Problema

Come possiamo distinguere la curva di Koch dal setaccio di Sierpinski?

La dimensione frattale

Dimensione di similitudine

La dimensione di similitudine del setaccio di Sierpinski è la soluzione dell'equazione

$$3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^s = 1$$

ossia $s = \log(3)/\log(2) \approx 1.58$.

La dimensione di similitudine della curva di Koch è la soluzione dell'equazione

$$4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^s = 1$$

ossia $s = \log(4)/\log(3) \approx 1.26$.

Dato un insieme di n similitudini $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_n\}$ la dimensione di similitudine s del suo attrattore è l'unica soluzione dell'equazione

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^s = 1$$

dove $\lambda_i < 1$ è il coefficiente di similitudine di f_i, con $i = 1, \ldots, n$.

Domanda

Ha senso dire che s è una dimensione?

Requisiti minimi per una dimensione

Ci si attende che la dimensione goda almeno delle seguenti proprietà:

- restituisca i valori noti nel caso del punto (0), del segmento (1), del quadrato (2) ecc...
- sia monotona ossia se $X \subset Y$ allora

$$dim(X) \leq dim(Y)$$

- sia stabile ossia data una famiglia finita di insiemi chiusi $\{X_i\}$ la dimensione dell'unione sia il massimo delle dimensioni di ciascun X_i
- sia invariante per un insieme di trasformazioni sufficientemente ampio.

Osservazione

Consideriamo in $\mathbb{R}$ il seguente IFS

$$f_1(x) = \frac{1}{2}x \qquad f_2(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

il cui attrattore è $[0,1] \subset \mathbb{R}$. Si ha

$$s = 1.$$

Tuttavia in $\mathbb{R}$ anche il seguente IFS

$$f_1(x) = \frac{3}{4}x \qquad f_2(x) = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$$

ha come attrattore $[0,1]$. Ma

$$s = \frac{log(2)}{log(4) - log(3)} \neq 1.$$

Allora, s non può chiamarsi dimensione!?

Dimensione di Hausdorff

Sia $\overline{B}_\delta$ una palla chiusa di diametro $\delta > 0$. Dato $X \subset \mathbb{R}^2$ lo ricopro con un insieme $\mathcal{R}_\delta$ finito o numerabile di palle chiuse di diametro minore o uguale a δ.

Considero la funzione di due variabili reali ($s \geq 0$) definita non negativa

$$\mathcal{H}_X(s, \delta) = \inf \sum_{\mathcal{R}_\delta} \delta_i^s$$

dove l'estremo inferiore si calcola su tutti i possibili $\mathcal{R}_\delta$.

Si calcola

$$\lim_{\delta \to 0^+} \mathcal{H}_X(s, \delta) = \mathcal{H}_X(s)$$

La funzione $\mathcal{H}_X(s)$ è una funzione non crescente di s e, se esiste, ha un unico punto di discontinuità $\dim_H(X)$ che prende il nome di dimensione di Hausdorff di X.

Teorema di Moran

Condizione di open set

Dato un IFS $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$ esso soddisfa la condizione di open set se esiste un aperto $V \subset \mathbb{R}^2$ tale che

$$\bigcup_{i=1}^{n} f_i(V) \subseteq V \qquad f_i(V) \cap f_j(V) = \emptyset \quad i \neq j.$$

Teorema di Moran

Dato l'IFS $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$, se $\mathcal{F}$ soddisfa la condizione di open set, allora la dimensione di Hausdorff del suo attrattore è uguale alla dimensione di similitudine.

Verificare che le similitudini relative al setaccio di Sierpinski e alla curva di Koch verificano la condizione di open set.

I frattali

A questo punto possiamo dare la seguente definizione

Definizione di frattale

Un sottoinsieme $X \subset \mathbb{R}^2$ si dice frattale se la sua dimensione di Hausdorff **non** è intera.

La definizione è equivalente a quella data da B. Mandelbrot [2].

Applicazioni

Il paradosso della lunghezza della costa

Costa britannica (L.F. Richardson 1950, B. Mandelbrot 1967)

Costa norvegese (J. Feder cit. 1988)

Costa irlandese (S. Hutzler 2013)

Come si stima la dimensione di Hausdorff di una costa?

Si fa riferimento alla dimensione box-counting (se esiste):

$$\dim_B(X) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{\log N(\epsilon)}{\log(1/\epsilon)} \geq \dim_H(X)$$

dove $N(\epsilon)$ rappresenta il numero di quadrati di lato ϵ che ricoprono la costa.

Costa britannica 1.25, norvegese 1.52 e irlandese 1.22.

Box counting

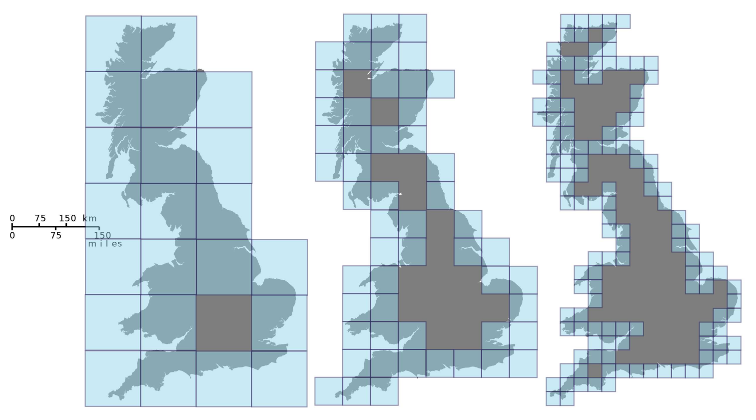


Figura 1: Ricoprimenti con quadrati di lato diverso (da Wikipedia)

Si rappresentano i dati in scala logaritmica e si determina la retta di regressione...

Barnsley fern

Figura 2: IFS (4 trasformazioni affini)

Nota: un IFS si può definire a partire da un insieme di contrazioni. In generale una trasformazione f del piano è una contrazione se presi due punti A e B si ha

$$d_E(f(A), f(B)) \leq k \cdot d_E(A, B)$$

dove d_E indica la distanza euclidea e $k \in (0, 1)$.

Teorema di approssimazione

Dato $K \subset \mathbb{R}^2$ compatto esiste un IFS il cui attrattore E è infinitamente vicino a K.

Altri campi di applicazione

Insiemi frattali si ritrovano in

- medicina
- fisica
- botanica
- finanza
- statistica
- informatica
- arte

Letture consigliate

- M. Barnsley, *Fractals everywhere*, Academic Press, Boston, 1993.
- B. Mandelbrot,*The Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freeman and Co., NY, 1977.
- H.-O. Peitgen, P.H. Richter, *La bellezza dei frattali*, Edizioni Boringhieri, Torino, 1987.