## $\boxed{\text{Lo spazio euclideo n-dimensionale } \mathbb{E}^n}$

- Punti e segmenti
- Segmenti orientati e vettori
- Operazioni vettoriali
- Coordinate di un vettore, basi canoniche
- Prodotto scalare e norme, versori ortogonali.

## $\boxed{\text{Il gruppo lineare } GL_n}$

- Trasformazioni lineari $f: \mathbb{E}^n \longrightarrow \mathbb{E}^n$ (ENDOMORFISMI DI $\mathbb{E}^n$)
- Rappresentazione matriciale
- Composizione e prodotto matriciale
- Trasformazioni invertibili e determinante

## $\boxed{\text{Il gruppo ortogonale } O_n}$

- Isometrie lineari e matrici ortogonali
- Inverse di una isometria lineare e matrice trasposta
- Rappresentazione matriciale del sottogruppo $O_2 \leq GL_2$
- Rotazioni, riflessioni, loro inverse e composizioni
- Il sottogruppo normale delle rotazioni e l'azione delle riflessioni.

<u>NOTE</u> per $O_2$ :

- rotazione $A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ di $\circlearrowleft \alpha$ rad.
- riflessione $B_\beta = \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix}$ su retta per O di angolo $\beta/2$ rad

<u>COMPOSIZIONE</u>

$$A_{\alpha_2} A_{\alpha_1} = A_{\alpha_1+\alpha_2} \quad ; \quad B_{\beta_2} B_{\beta_1} = A_{\beta_2-\beta_1} \quad ; \quad A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e \text{ identità}$$

$$A_\alpha^{-1} = A_{-\alpha} \quad ; \quad B_\beta^{-1} = B_\beta \quad ; \quad B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ riflessione sull'asse } y=0$$

$$B_\beta A_\alpha = B_{\beta-\alpha}$$

$$B_\beta A_\alpha = B_{\beta-\alpha}$$
$$\Longrightarrow \quad B_\beta A_\alpha B_\beta = A_{-\alpha}$$
$$A_\alpha B_\beta = B_{\alpha+\beta}$$

## SIMMETRIA CENTRALE

ha matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A_\pi$ : quindi vi è simmetria centrale ogni volta che c'è simmetria rotazionale di ordine pari.

## PERIODO DEGLI ELEMENTI

- $B_\beta$ ha periodo 2 $\forall \beta$
- $A_\alpha$ < è periodico se $\alpha \in \mathbb{Q}\pi$ ; è aperiodico se $\alpha \notin \mathbb{Q}\pi$

# IL GRUPPO EUCLIDEO $E_2$

- Isometrie del piano $E_2 = T_2 O_2$ , con $T_2 =$ traslazioni di $E^2$
  $O_2 =$ isometrie lineari di $E^2$

## COMPOSIZIONE

$$T_2 = \left\{ t_{\bar v} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \;\middle|\; \bar v \in \mathbb{E}^2 \right\}$$

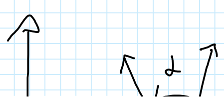
$$O_2 = \left\{ \varphi : \varphi = A_\alpha \ \vee \ \varphi = B_\beta \ , \ \alpha, \beta \in [0, 2\pi[ \right\}$$

$$t_{\bar v} \circ \varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{cases} A_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \\ B_\beta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \end{cases} ; \quad t_{\bar v} \circ t_{\bar u} = t_{\bar u + \bar v} \ , \quad t_{\bar v}^{-1} = t_{-\bar v}$$

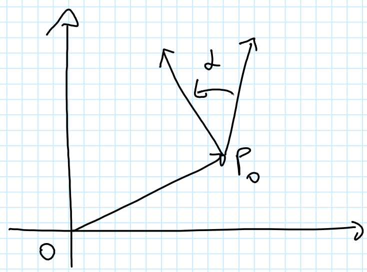
$$\varphi \circ t_{\bar v} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \varphi \begin{pmatrix} x + v_x \\ y + v_y \end{pmatrix} = \varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \varphi \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = t_{\varphi(\bar v)} \circ \varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$ poiché $\varphi$ è lineare

$$\varphi \circ t_{\bar v} \circ \varphi^{-1} = \left( t_{\varphi(\bar v)} \circ \varphi \right) \circ \varphi^{-1} = t_{\varphi(\bar v)} \circ \left( \varphi \circ \varphi^{-1} \right) = t_{\varphi(\bar v)}$$

## ROTAZIONI ATTORNO AD UN PUNTO $P_0$

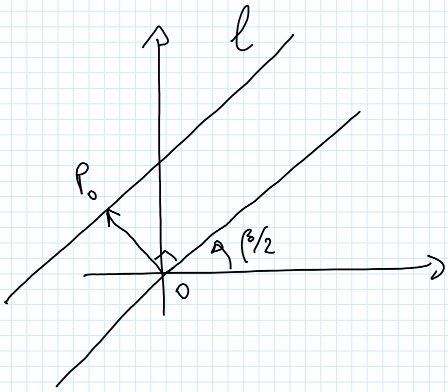


$$t \circ A_\alpha \circ t_0^{-1} = t \circ A_\alpha \circ t = t \circ t \circ A_\alpha = t \circ A_\alpha$$




$$\underline{t_{P_0} \circ A_\alpha \circ t_{P_0}^{-1}} = t_{P_0} \circ A_\alpha \circ t_{-P_0} = t_{P_0} \circ t_{-A_\alpha P_0} \circ A_\alpha = \underline{t_{P_0 - A_\alpha P_0} \circ A_\alpha}$$

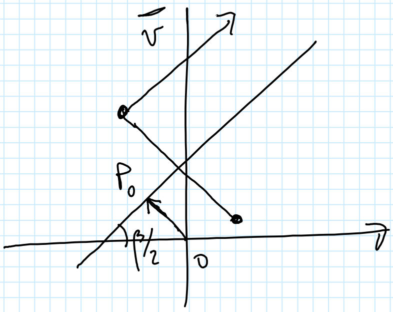
## RIFLESSIONE LUNGO UNA RETTA ARBITRARIA




$$\underline{t_{P_0} \circ B_\beta \circ t_{P_0}^{-1}} = t_{P_0} \circ B_\beta \circ t_{-P_0} = t_{P_0} \circ t_{-B_\beta P_0} \circ B_\beta =$$

$$= t_{P_0 - B_\beta P_0} \circ B_\beta = \underline{t_{2P_0} \circ B_\beta}$$

## GLISSO-RIFLESSIONE LUNGO UNA RETTA ARBITRARIA




$$\underline{t_{\bar{v}} \circ t_{2P_0} \circ B_\beta = t_{2P_0 + \bar{v}} \circ B_\beta}$$

## $\boxed{\text{CLASSIFICAZIONE DI } E_2}$

a) Ogni isometria diretta $\varphi = t_{\bar{v}} \circ A_\alpha$ è una pura traslazione oppure una rotazione attorno ad un opportuno punto $P_0$

b) Ogni isometria inversa $\psi = t_{\bar{v}} \circ B_\beta$ è una riflessione o una glisso-riflessione relativa ad una opportuna retta.