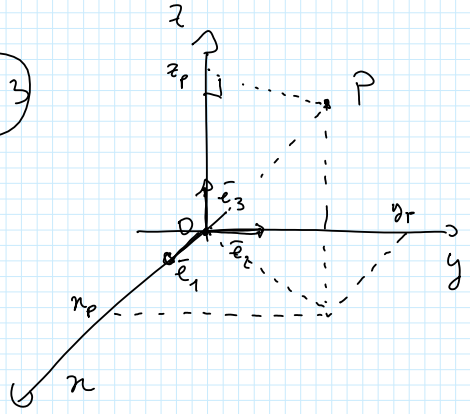
$n = 1, 2, 3, \dots$ un intero positivo qualsiasi: considereremo i casi $n = 2$ e $n = 3$: $\mathbb{E}^2$ il piano euclideo ... si può definire $\mathbb{E}^n$ in modo analogo

$n = 3$



$P \longleftrightarrow (x_P, y_P, z_P) \in \mathbb{R}^3$

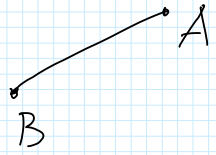
↑ corrisp. biunivoca

PUNTO — LE COORDINATE DEL PUNTO

SEGMENTO $\overset{DEF}{\equiv}$ COPPIA DI PUNTI NON ORDINATA A, B $\quad AB = BA$

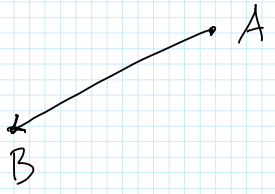
lunghezza del segmento $AB \equiv$

$\equiv$ distanza tra i punti A e B



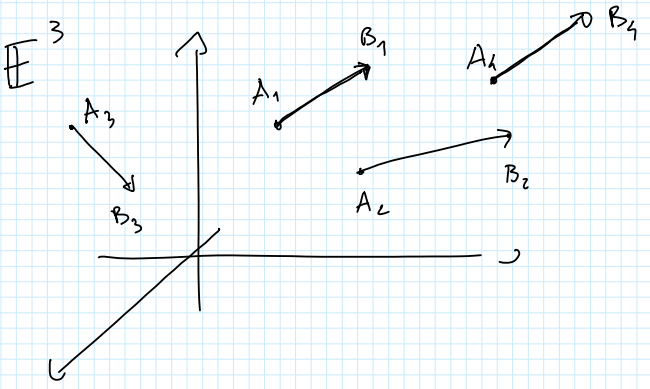
$$\equiv d(A,B) = |AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$$

SEGMENTO ORIENTATO $\overset{DEF}{\equiv}$ UNA COPPIA ORDINATA DI PUNTI $AB \neq BA$



A è detta origine del segmento

B è detta estremo del segmento



DUE SEGMENTI ORIENTATI SI DICONO EQUIVALENTI

SE LA STESSA TRASLAZIONE CHE PORTA L'ORIGINE DEL PRIMO NELL'ORIGINE DEL SECONDO, PORTA ANCHE L'ESTREMO DEL PRIMO NELL'ESTREMO DEL SECONDO

IN ALTRE PAROLE

$AB \sim A'B'$ se e solo se

- AB e $A'B'$ hanno la stessa direzione, cioè stanno su rette tra loro $\parallel$
- AB e $A'B'$ hanno lo stesso verso, cioè origine ed estremo dei due segmenti stanno nelle rette $\parallel$ nello stesso ordine
- $|AB| = |A'B'|$ hanno la stessa lunghezza

NB: la relazione di equivalenza ha le stesse proprietà dell'equipollenza, cioè:

RIFLESSIVA: $\forall\, AB$, $AB \sim AB$

SIMMETRICA: $\forall\, AB, A'B'$ se $AB \sim A'B'$ allora $A'B' \sim AB$

TRANSITIVA: $\forall\, AB, CD, EF$ se $AB \sim CD$ e $CD \sim EF$ allora $AB \sim EF$

Per ogni segmento orientato AB, denotiamo con $\overline{AB}$ (CLASSE DI EQUIVAL.) l'insieme di tutti i segmenti orientati ad esso equivalenti

$$\overline{AB} = \{A'B' \mid AB \sim A'B'\}\ ;$$ così $\overline{AB} = \overline{CD}$ se e solo se $AB \sim CD$

DEFINIZIONE: le CLASSI DI EQUIVALENZA dei segmenti orientati sono dette VETTORI

(AB e CD sono detti RAPPRESENTANTI DELLA CLASSE)

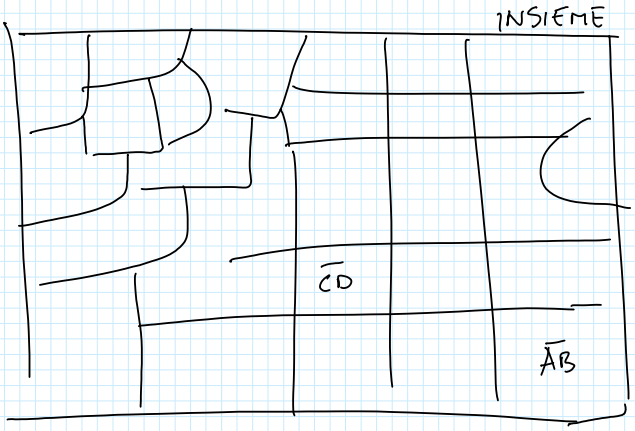
DEFINIZIONE : le CLASSI DI EQUIVALENZA dei segmenti orientati sono dette VETTORI.

detti RAPPRESENTANTI DELLA CLASSE

SI SCRIVE

$\bar{v} = \overline{AB}$

il vettore $\bar{v}$, che è la classe $\overline{AB}$, ha per rappresentante il segmento orientato AB



PARTIZIONE DELL'INSIEME IN CLASSI

$\sim$ relazione di equivalenza

cioè RIFL + SIMM + TRANS.

$$X = \bigcup_{AB} \overline{AB}$$

$$\overline{AB} \cap \overline{CD} = \begin{cases} \emptyset & \text{se } AB \not\sim CD \\ \overline{AB} & \text{se } AB \sim CD \end{cases}$$

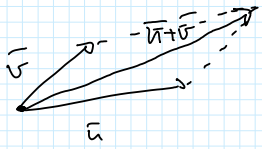
c'è una corrispondenza biunivoca tra tutte le relazioni di equivalenza su un insieme X e tutte le partizioni dell'insieme X.

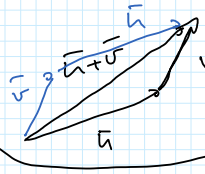
OPERAZIONI TRA VETTORI V di $\mathbb{E}^3$

$+ : V \times V \longrightarrow V$

$(\bar{u}, \bar{v}) \longmapsto \bar{u} + \bar{v}$

SOMMA VETTORIALE

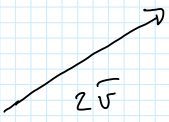


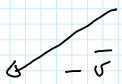


$\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$

$(\alpha, \bar{v}) \longmapsto \alpha\bar{v}$

PRODOTTO PER UNO SCALARE





Sono operazioni ben definite:

$(V, +)$ è un gruppo abeliano con elem. neutro

$$e = \bar{0} = \overline{AA} = \overline{OO}$$

in più: $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$, $\forall\, \bar{u}, \bar{v} \in V$

$$\left.\begin{aligned} a(\bar{u}+\bar{v}) &= (a\bar{u}) + (a\bar{v}) \\ (a+b)\bar{u} &= a\bar{u} + b\bar{u} \end{aligned}\right\} \text{ DISTRIBUTIVA}$$

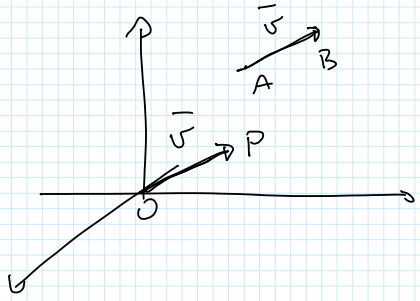
$$-1 \cdot \bar{u} = -\bar{u} \quad \text{opposto di } \bar{u}$$

$$0 \cdot \bar{u} = \bar{0}$$

$$a(b\bar{u}) = (ab)\bar{u}$$

COORDINATE DI UN VETTORE in E^3

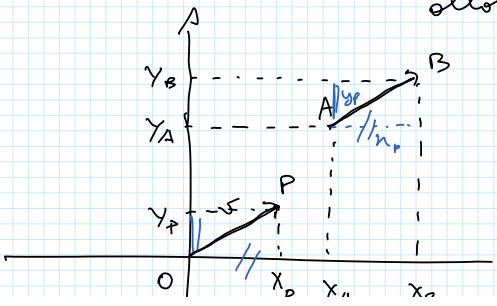
$\forall\, \bar{v}$, consideriamo il rappresentante di $\bar{v}$ con origine in O;



detto P il corrispondente estremo, cioè $\bar{v} = \overline{OP}$, diremo che LE COORDINATE DI $\bar{v}$ SONO LE COORDINATE DI P.

Cioè se $P = (x_P, y_P, z_P)$ diciamo che (x_P, y_P, z_P) sono le coordinate di $\bar{v}$ e scriviamo $\bar{v} = (x_P, y_P, z_P)$.

OSSERV: Se $\bar{v} = AB$ con $A = (x_A, y_A, z_A)$ e $B = (x_B, y_B, z_B)$



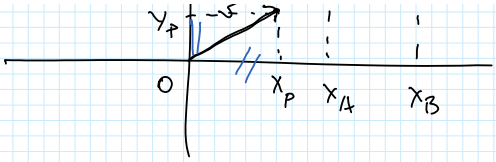
allora $\bar{v} = \overline{OP} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$

$= B - A$

Si scrive anche

$$\boxed{\bar{v} = B - A}$$

$x = x_2 - x_1$



$$\boxed{\bar v = B - A}$$

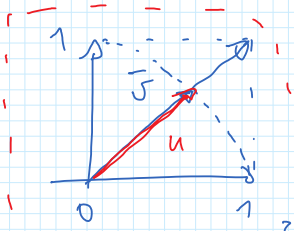
$$x_P = x_B - x_A$$
$$y_P = y_B - y_A$$

La NORMA o lunghezza di un vettore $\bar v$ è la lunghezza di un qualunque segmento orientato che lo rappresenti: $\bar v = \overline{AB} \Rightarrow \|\bar v\| = |\overline{AB}|$

Quindi se $\bar v = (x,y,z)$ allora $\|\bar v\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Un vettore $\bar v$ è detto VERSORE se $\|\bar v\| = 1$.

Ogni vettore $\bar v = (a,b,c)$ ha in modo naturale un suo versore associato



$$\bar u = \frac{\bar v}{\|\bar v\|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \underbrace{(a,b,c)}_{=\bar v}$$

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2} = \frac{1}{\|\bar v\|}$$

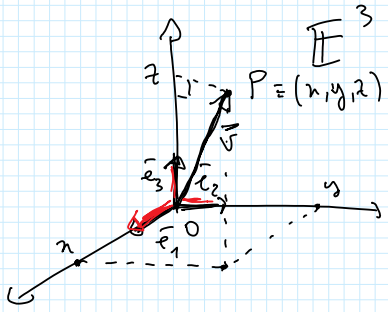
$\|\bar v\| = \sqrt{2}$

$\bar v = (1,1) \in \mathbb{E}^2$ $\quad \bar u = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$

Infatti $\|\bar u\| = \left\| \frac{\bar v}{\|\bar v\|} \right\| = \left\| \underbrace{\frac{1}{\|\bar v\|}}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{\bar v}_{\in V} \right\| = \frac{1}{\|\bar v\|} \|\bar v\| = 1$

Ci sono in $\mathbb{E}^n$ n versori canonici:

$$\bar e_1 = (1,0,\dots,0), \quad \bar e_2 = (0,1,0,\dots,0), \quad \dots, \quad \bar e_n = (0,\dots,0,1)$$



HW: Se $\bar v = (x,y,z)$ allora $\bar v = x\bar e_1 + y\bar e_2 + z\bar e_3$

$\bar e_1 = (1,0,0)$
$\bar e_2 = (0,1,0)$
$\bar e_3 = (0,0,1)$

CONSEGUENZA: Se $\bar v_1 = (x_1,y_1,z_1)$ e $\bar v_2 = (x_2,y_2,z_2)$

allora $\bar{v}_1+\bar{v}_2 = \left(x_1\bar{e}_1+y_1\bar{e}_2+z_1\bar{e}_3\right)+\left(x_2\bar{e}_1+y_2\bar{e}_2+z_2\bar{e}_3\right) =$

$= (x_1+x_2)\bar{e}_1+(y_1+y_2)\bar{e}_2+(z_1+z_2)\bar{e}_3$

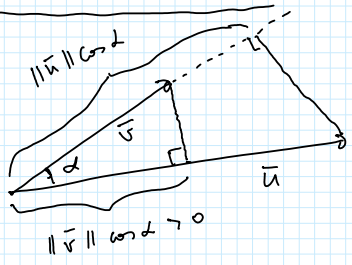
cioè $\boxed{\bar{v}_1+\bar{v}_2 = (x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ z_1+z_3)}$

ANALOGAMENTE SI DIMOSTRA CHE SE $\alpha\in\mathbb{R}$ e $\bar{v}=(x,y,z)\in V$, allora $\boxed{\alpha\bar{v}=(\alpha x,\alpha y,\alpha z)}$.

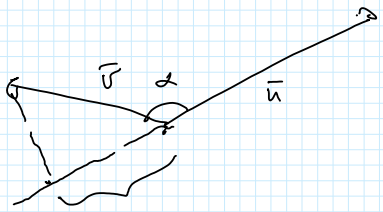
PRODOTTO SCALARE

$V\times V \longrightarrow \mathbb{R}$

$(\bar{u},\bar{v}) \longmapsto \bar{u}\cdot\bar{v}$



$\bar{u}\cdot\bar{v} \overset{DEF}{=} \|\bar{u}\|\,\|\bar{v}\|\cos\alpha$



$\|\bar{v}\|\cos\alpha < 0$

PROPRIETÀ DEL PRODOTTO SCALARE: $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, $\forall\,\bar{u}_1,\bar{u}_2,\bar{v}_1,\bar{v}_2$ vettori:

$\bar{u}_1\cdot\bar{v}_1 = \bar{v}_1\cdot\bar{u}_1$ COMMUTATIVITÀ

$\left(\bar{u}_1+\bar{u}_2\right)\cdot\bar{v}_1 = \bar{u}_1\cdot\bar{v}_1+\bar{u}_2\cdot\bar{v}_1$

$\bar{u}_1\cdot\left(\bar{v}_1+\bar{v}_2\right) = \bar{u}_1\cdot\bar{v}_1+\bar{u}_1\cdot\bar{v}_2$

$\alpha\left(\bar{u}_1\cdot\bar{v}_1\right) = \left(\alpha\bar{u}_1\right)\cdot\bar{v}_1 = \bar{u}_1\cdot\left(\alpha\bar{v}_1\right)$

} BILINEARITÀ

$\bar{u}_1\cdot\bar{v}_1 = 0$ se e solo se $\bar{u}_1=\bar{0}$ V $\bar{v}_1=\bar{0}$ V $\bar{u}_1\perp\bar{v}_1$

$\bar{u}_1\cdot\bar{u}_1 = \|\bar{u}_1\|^2$

OSSERVAZIONE $\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3$ sono versori a 2 a 2 ortogonali

Cioè $\bar{e}_i\cdot\bar{e}_j = \begin{cases}1 & \text{se } i=j\\ 0 & \text{se } i\neq j\end{cases}$

Come possiamo calcolare il prodotto scalare tra due vettori

Come possiamo calcolare il prodotto scalare tra due vettori per mezzo delle loro coordinate?

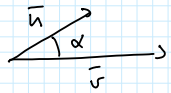
Siano $\bar{u} = (u_x, u_y, u_z)$ e $\bar{v} = (v_x, v_y, v_z)$. Allora

$$\bar{u}\cdot\bar{v} = (u_x, u_y, u_z)\cdot(v_x, v_y, v_z) = \left(u_x\bar{e}_1 + u_y\bar{e}_2 + u_z\bar{e}_3\right)\cdot\left(v_x\bar{e}_1 + v_y\bar{e}_2 + v_z\bar{e}_3\right) =$$

$$= u_x v_x \bar{e}_1\cdot\bar{e}_1 + u_y v_y \bar{e}_2\cdot\bar{e}_2 + u_z v_z \bar{e}_3\cdot\bar{e}_3 + u_x v_y \bar{e}_1\cdot\bar{e}_2 + \dots + u_z v_y \bar{e}_3\cdot\bar{e}_2 =$$

$$= u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z .$$

ESEMPIO: Dati $\bar{u} = (1, 0, -1)$ e $\bar{v} = (2, 1, 0)$ calcolare $\bar{u}\cdot\bar{v}$ e il coseno dell'angolo α tra $\bar{u}$ e $\bar{v}$



$\rightarrow \bar{u}\cdot\bar{v} = (1,0,-1)\cdot(2,1,0) = 1\cdot 2 + 0\cdot 1 + (-1)\cdot 0 = 2$

$\rightarrow$ poiché $\bar{u}\cdot\bar{v} = \|\bar{u}\|\,\|\bar{v}\|\cos\alpha$ allora

$$\cos\alpha = \frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{\|\bar{u}\|\,\|\bar{v}\|} = \frac{2}{\sqrt{1^2+1^2}\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

DEF: in $\mathbb{E}^n$ un insieme di vettori $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ è detto SISTEMA ORTONORMALE se ciascun $\bar{v}_i$ è un versore e se i $\bar{v}_i$ sono a 2 a 2 ortogonali, cioè se

$$\bar{v}_i\cdot\bar{v}_j = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Osserviamo facilmente che $\{\bar{e}_1 = (1,0,\dots,0), \bar{e}_2 = (0,1,0,\dots), \dots, \bar{e}_n = (0,\dots,0,1)\}$ è un sistema ortonormale. Tuttavia non è l'unico possibile. Ad esempio in $\mathbb{E}^3$ il sistema $\{(0,1,0), (\sqrt{2}/2, 0, -\sqrt{2}/2), (\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)\}$ è, come si verifica facilmente, un altro sistema ortonormale.

— ∘ —

Siano m, n interi positivi; una matrice a m righe e n colonne è una tabella contenente $m \times n$ dati disposti in

colonne e una tabella contenente $m \times n$ dati disposti in ordine; più precisamente

$$A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}) \iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}) \quad \begin{matrix} i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n \end{matrix}$$

$M_{m\times n}(\mathbb{R})$: l'insieme delle matrici a m righe e n colonne e coefficienti in $\mathbb{R}$

Con $a_{ij} \in \mathbb{R}$ $\forall i$ $\forall j$

ESEMPI:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 \\ 0 & \sqrt{2} & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{Z})$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{7} & 14 & -1 \end{pmatrix} \in M_{1\times 4}(\mathbb{R})$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix} \in M_{3\times 1}(\mathbb{Z})$$

Le matrici si possono moltiplicare tra loro, purché il numero delle colonne della prima coincida con il numero delle righe della seconda:

$$\begin{matrix} R_1 \\ R_2 \end{matrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ C_1 \end{matrix}\begin{matrix} \\ C_4 \end{matrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 & 5 \\ -3 & 0 & 6 & -7 \end{pmatrix} = \begin{matrix} R_1 \\ \to \end{matrix}\begin{pmatrix} -2\sqrt{2} & \cdots & \\ \text{etc.} & & \\ & & -23 \end{pmatrix} \leftarrow R_2$$

C_1: $(\sqrt{2}, 0) \cdot (-2, -3)$

$3\times 2 \quad 2\times 4 \quad 3\times 4$

-23: C_4

E' definito un prodotto tra matrici

$$M_{m\times k}(\mathbb{R}) \times M_{k\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{m\times n}(\mathbb{R})$$

$$M_{m\times k}(\mathbb{R}) \times M_{k\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{m\times n}(\mathbb{R})$$

$$(A, B) \longmapsto AB = C$$

$$(a_{ij})_{i,j} \quad (b_{ij})_{i,j} \qquad (c_{ij})_{i,j}$$

dove c_{ij} = prodotto scalare tra la riga i di A e la colonna j di B $= \sum_{l=1}^{k} a_{il} b_{lj}$

In particolare se $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ sono matrici quadrate di ordine n, allora AB e BA sono ancora matrici quadrate di ordine n. Osserviamo che

- $A I_n = I_n A = A$
- In generale $AB \neq BA$ (HW: trovare un esempio con matrici 2×2)

DEF: $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ si dice INVERTIBILE se

$\exists\, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tale che $AB = I_n = BA$.

In tal caso si dimostra che B è unica, è detta l'inverso di A e si denota con $B = A^{-1}$.

Unicità di A^{-1}: Supponiamo che B, C siano tali che $AB = I_n = BA$ e $AC = I_n = CA$. Allora $B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_n C = C$

ESEMPI: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ è invertibile (chi è A^{-1}? HW)

$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ non è invertibile (perché? HW)

∴ Il prodotto è associativo, cioè $A(BC) = (AB)C$

L'insieme delle matrici $n \times n$ a coeff. in $\mathbb{R}$ invertibili con l'operazione di moltiplicazione formano UN GRUPPO detto il GRUPPO LINEARE e denotato con

$$GL_n(\mathbb{R}) = \{ A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid A \text{ è invertibile} \}$$

NB: Se $A, B \in GL_n(\mathbb{R})$ allora $\exists A^{-1}$ $\exists B^{-1}$; chi è $(AB)^{-1}$? Si vede che $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Infatti: $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = I_n$

($A^{-1}A = I_n$, $B^{-1}B = I_n$)

e $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I_n$

($BB^{-1} = I_n$)

DEF: Se $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ allora la TRASPOSTA di A è per definizione la matrice

$$A^t = (a_{ji})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$$

ES:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ \sqrt{2} & 7 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \sqrt{2} \\ -2 & 0 & 7 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

ES: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ \sqrt{2} & 7 & -1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 7 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

A è simmetrica $\overset{DEF}{\iff} A^t = A$

NB: $(AB)^t = B^t A^t$ (HW lungo ma non diff.)

$$\left(\begin{array}{l} A = (a_{ij})_{i,j} \qquad A^t = (a_{ji})_{i,j} \quad \ldots \\ AB = (c_{ij})_{i,j} \quad \text{con} \quad c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj} \quad \ldots \end{array} \right)$$