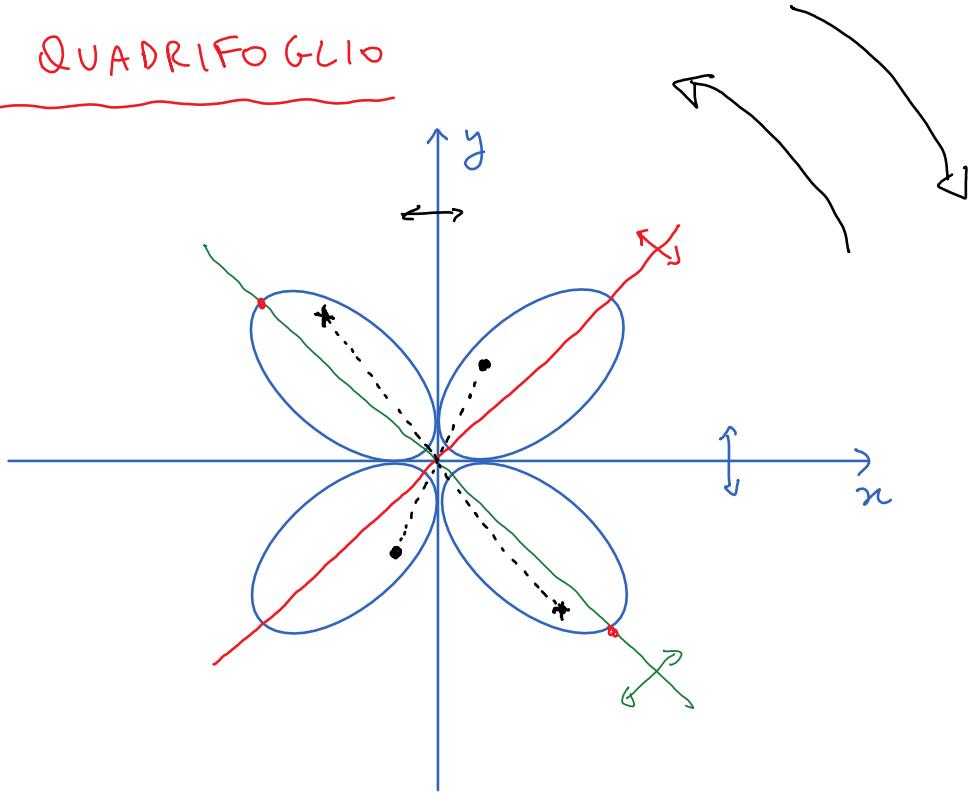
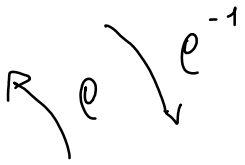
Come si può "MISURARE" le simmetrie di una figura?

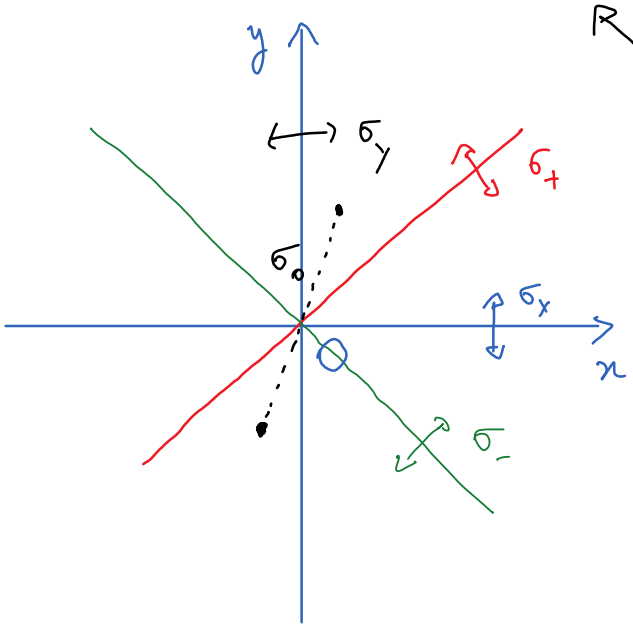
IL QUADRIFOGLIO



Possiamo introdurre alcune TRASFORMAZIONI DEL PIANO "suggerite" dalle simmetrie delle figure:

- ρ rotazione antioraria di $\pi/2$
- ρ^{-1} rotazione oraria di $\pi/2$
- σ_x riflessione sull'asse delle X
- σ_y riflessione sull'asse delle Y





σ_+ riflessione nella prima bisettrice

σ_- riflessione nella seconda bisettrice

σ_0 simmetrie centrale rispetto a O (anche detta "inversione")

SONO TUTTE FUNZIONI BIIETTIVE

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$P=(x,y) \longmapsto P'=(x',y')=f(P)$$

CHE "NON DEFORMANO" LE FIGURE, CIOE' CONSERVANO LE DISTANZE TRA I PUNTI (ISOMETRIE)

$$P_1 \longmapsto P_1' \quad P_2 \longmapsto P_2' \implies \mathrm{dist}(P_1,P_2) = \mathrm{dist}(P_1',P_2')$$

E SONO TALI PER CUI OSSERVANDO COME SI TRASFORMANO I SOLI PUNTI DELLA FIGURA SI NOTA CHE LA FIGURA TRASFORMATA E' INDISTINGUIBILE DA QUELLA DI PARTENZA

$$\rho(x,y) = (-y,x) \qquad \rho^{-1}(x,y) = (y,-x)$$

$$\rho^2(x,y) = \rho(\rho(x,y)) = \rho(-y,x) = (-x,-y)$$

$$\rho^3(x,y) = \rho\,\rho^2(x,y) = (y,-x) = \rho^{-1}(x,y)$$

$\rho(x,y) = \rho(-y,x) = (-x,-y)$

$\rho^4(x,y) = (x,y) = e(x,y)$ dove e è la trasformazione identica: $e(x,y) = (x,y)$

$\rho, \rho^2, \rho^3, \rho^4 = e, \rho^5 = \rho, \rho^6 = \rho^2, \ldots$

$\rho^3 = \rho^{-1}$

$\sigma_0(x,y) = (-x,-y) = \rho^2(x,y)$

$\sigma_0^2(x,y) = (x,y) \Rightarrow \sigma_0^2 = e$

$\sigma_x(x,y) = (x,-y)$

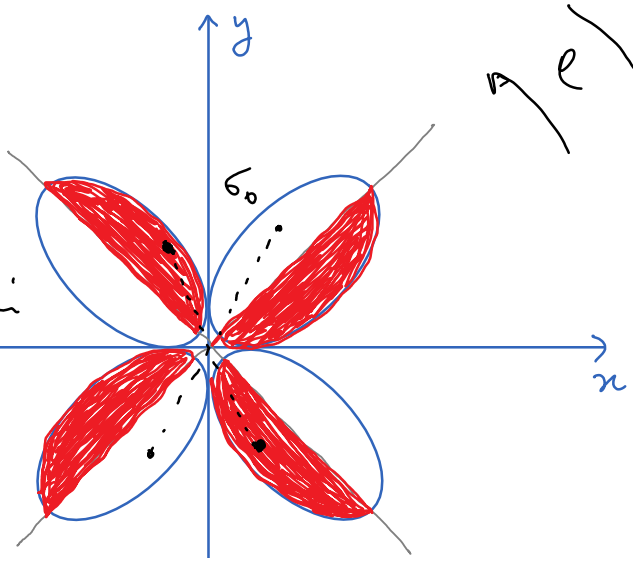
$\sigma_x^2 : (x,y) \mapsto (x,-y) \mapsto (x,y)$ ossia e cioè $\sigma_x^{-1} = \sigma_x$

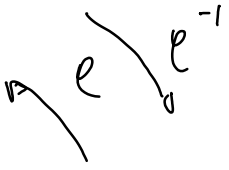
$\sigma_y(x,y) = (-x,y)$ $\quad \sigma_y^2 = e$ cioè $\sigma_y^{-1} = \sigma_y$

$\sigma_+(x,y) = (y,x)$ $\quad \sigma_+^2 = e$ cioè $\sigma_+^{-1} = \sigma_+$

$\sigma_-(x,y) = (-y,-x)$ $\quad \sigma_-^2 = e$ cioè $\sigma_-^{-1} = \sigma_-$

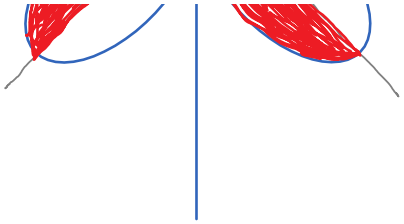
IL QUADRIFOGLIO BICOLORE





Le uniche trasformazioni di simmetrie in questo caso sono $\rho, \rho^{-1}, \sigma_0$ oltre

ρ, ρ^{-1}, σ_0 oltre alla identità e.



TORNIAMO A CONSIDERARE IL QUADRIFOGLIO SEMPLICE E COSTRUIAMO LA CORRISPONDENTE

TABELLA MOLTIPLICATIVA

CHE RIASSUME IL RISULTATO DELLA COMPOSIZIONE (O PRODOTTO) DI DUE ARBITRARIE TRASFORMAZIONI ISOMETRICHE DI SIMMETRIA

	e	ρ	$\rho^2=\sigma_0$	ρ^{-1}	σ_x	σ_y	σ_+	σ_-
e	e	ρ	ρ^2	ρ^{-1}	σ_x	σ_y	σ_+	σ_-
ρ	ρ	ρ^2	ρ^{-1}	e	σ_+	σ_-	σ_y	σ_x
$\sigma_0=\rho^2$	ρ^2	ρ^{-1}	e	ρ	σ_y	σ_x	σ_-	σ_+
ρ^{-1}	ρ^{-1}	e	ρ	ρ^2	σ_-	σ_+	σ_x	σ_y
σ_x	σ_x	σ_y	σ_x	σ_+	e	σ_0	ρ^{-1}	ρ
σ_y	σ_y	σ_x	σ_y	σ_-	σ_0	e	ρ	ρ^{-1}
σ_+	σ_+	σ_-	σ_+	σ_y	ρ	ρ^{-1}	e	σ_0
σ_-	σ_-	σ_+	σ_-	σ_x	ρ^{-1}	ρ	σ_0	e

- i prodotti segnati con cornice rossa NON COMMUTANO
- in verde i prodotti banali per cose
- Nella cornice verde le simmetrie del quadrifoglio bicolore

$\rho\sigma_x : (x,y) \mapsto (x,-y) \mapsto (y,x)$ è σ_+

$\rho\sigma_y : (x,y) \mapsto (-x,y) \mapsto (-y,-x)$ è σ_-

$\rho\sigma_+ : (x,y) \mapsto (y,x) \mapsto (-x,y)$ è σ_y

$\sigma_0 \sigma_x : (x,y) \mapsto (x,-y) \mapsto (-x,y)$ è σ_y

$\sigma_0 \sigma_y : (x,y) \mapsto (-x,y) \mapsto (x,-y)$ è σ_x

$\rho^2 \sigma_y = \rho(\rho \sigma_y) = \rho \sigma_- = \sigma_x$

$\sigma_0 \sigma_+ : (x,y) \mapsto (y,x) \mapsto (-y,-x)$ è σ_-

$\sigma_x \rho : (x,y) \mapsto (-y,x) \mapsto (-y,-x)$ è σ_-

$\sigma_x \sigma_0 : (x,y) \mapsto (-x,-y) \mapsto (-x,y)$ è σ_y

$\sigma_y \sigma_0 : (x,y) \mapsto (-x,-y) \mapsto (x,-y)$ è σ_x

$\sigma_y \rho : (x,y) \mapsto (-y,x) \mapsto (y,x)$ è σ_+

- - - - - -

X CASA : completare le tabelle.

OSSERV : • moltiplicando tra loro 2 di queste 8 trasf. isometriche si ottiene sempre una di esse (CHIUSURA)

• poiché la composizione è associativa, se ne compongo 3 o più

ad es $\rho \sigma_y \sigma_+ = (\rho \sigma_y)\sigma_+ = \rho(\sigma_y \sigma_+)$

ottengo sempre come risultato una di esse

• non sempre commutano tra loro

• ogni riga e ogni colonna vede

- ogni riga e ogni colonna vede tutte le trasformazioni, mai ripetute (è una permutazione)

- le simmetrie del quadrifoglio bicolore formano una sottotabella (incorniciata in verde) nella quale i prodotti commutano:
LE SIMMETRIE DEL QUADRIFOGLIO BICOLORE FORMANO UN SOTTOGRUPPO ABELIANO DEL GRUPPO DELLE SIMMETRIE DEL QUADRIFOGLIO SEMPLICE.

X CASA: verificare che queste trasformazioni sono tutte isometrie (scegliere due o tre, e provare su queste).

NB Se $P=(x,y)$ e $P'=(x',y')$

allora $d(P,P') = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}$

Per esempio se consideriamo

- $\sigma_x : (x,y) \mapsto (x,-y)$ abbiamo $P=(x,y)$, $P'=(x',y')$

e $\sigma_x(P) = (x,-y)$, $\sigma_x(P') = (x',-y')$ ed allora

$$d(\sigma_x(P),\sigma_x(P')) = \sqrt{(x-x')^2+(-y-(-y'))^2} = \sqrt{(x-x')^2+(y'-y)^2}$$
$$= \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2} = d(P,P')$$

- $\sigma_- : (x,y) \mapsto (-y,-x)$ abbiamo per P e P' come sopra

$\sigma_-(P) = (-y,-x)$, $\sigma_-(P') = (-y';-x')$ ed allora

$$d(\sigma_-(P), \sigma_-(P')) = \sqrt{(-y-(-y'))^2 + (-x-(-x'))^2} =$$

$$= \sqrt{(y'-y)^2 + (x'-x)^2} = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} =$$

$$= d(P,P')$$

In definitiva gli elementi matematici che "misurano" le simmetrie di una figura sono tutte e sole quelle isometrie che lasciano "globalmente inalterate" le figure stesse. Più precisamente:

Se $\mathbb{R}^3$ è lo spazio tridimensionale e se $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^3$ è una figura, associamo alla figura $\mathcal{F}$ l'insieme

$$\mathcal{G}(\mathcal{F}) = \{ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \mid f \text{ è isometria e } f(\mathcal{F}) = \mathcal{F} \}$$

che è detto IL GRUPPO DELLE SIMMETRIE di $\mathcal{F}$.

Notiamo che $\mathcal{G}(\mathcal{F})$ è UN GRUPPO, cioè soddisfa alle seguenti proprietà:

1) Se $e : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è l'isometria tale che $e(P) = P$ per ogni $P \in \mathbb{R}^3$ (e è detta l'IDENTITÀ), allora

1) per ogni $P \in \mathbb{R}^3$ (e è detta l'IDENTITÀ), allora $e \in \mathcal{G}(\mathcal{F})$

2) Se $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è tale che $f \in \mathcal{G}(\mathcal{F})$, allora anche l'isometria inversa $f^{-1} \in \mathcal{G}(\mathcal{F})$.

3) Se $f, g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sono entrambe in $\mathcal{G}(\mathcal{F})$, allora anche l'isometria composta $fg \in \mathcal{G}(\mathcal{F})$ (dove $fg(P) \overset{DEF}{=} f(g(P))$ per ogni $P \in \mathbb{R}^3$).