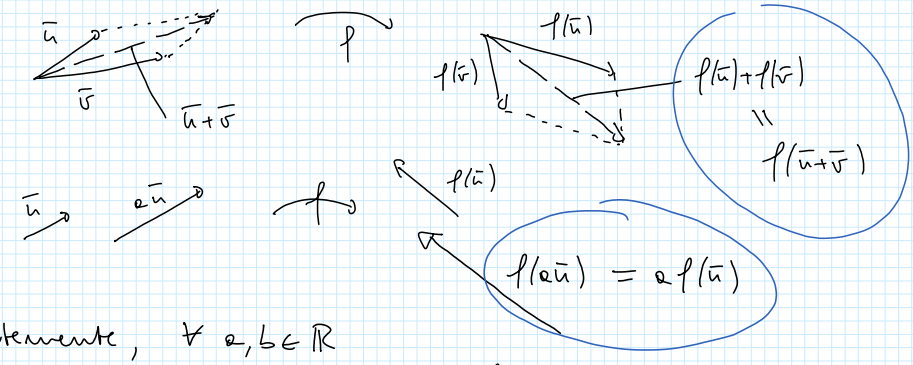
Una funzione $f: \mathbb{E}^n \longrightarrow \mathbb{E}^n$ può quindi essere considerata sia rispetto ai PUNTI $P=(x_1,\dots,x_n)$ di $\mathbb{E}^n$ che ai VETTORI $\bar{v}=(v_1,\dots,v_n)$ di $\mathbb{E}^n$, dato che punti e vettori sono entrambi rappresentati in modo univoco da n-ple di numeri reali. Scriveremo

$$\begin{aligned} f:\ \mathbb{E}^n &\longrightarrow \mathbb{E}^n \\ P &\longmapsto f(P) \\ \bar{v} &\longmapsto f(\bar{v}) \end{aligned}$$

Tra tutte le "trasformazioni di $\mathbb{E}^n$", cioè le funzioni $f: \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$, svolgono un ruolo estremamente importante le FUNZIONI LINEARI o ENDOMORFISMI di $\mathbb{E}^n$, cioè quelle per cui

- $\forall\ \bar{u},\bar{v}$ vettori di $\mathbb{E}^n$, $f(\bar{u}+\bar{v}) = f(\bar{u})+f(\bar{v})$
- $\forall\ a\in\mathbb{R}$, $\forall\ \bar{u}$ vettore di $\mathbb{E}^n$, $f(a\bar{v}) = a f(\bar{v})$



Equivalentemente, $\forall\ a,b\in\mathbb{R}$
$\forall\ \bar{u},\bar{v}$ vettori di $\mathbb{E}^n$

- $f(a\bar{u}+b\bar{v}) = a f(\bar{u}) + b f(\bar{v})$

Notiamo che in particolare si ottiene che

$f(\bar{0}) = \bar{0}$ (infatti $f(\bar{0}) = f(0\cdot\bar{0}) = 0\, f(\bar{0}) = \bar{0}$)

$f(-\bar{u}) = -f(\bar{u})$ (infatti $f(-\bar{u}) = f((-1)\bar{u}) = (-1) f(\bar{u}) = -f(\bar{u})$)

OSSERVAZIONE IMPORTANTE

Se $f: \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ è lineare, allora f è UNIVOCAMENTE DETERMINATA DAGLI n VETTORI $f(\bar{e}_1), f(\bar{e}_2), \dots, f(\bar{e}_n)$.

Infatti $\forall\ \bar{v}=(x_1,\dots,x_n)$ in $\mathbb{E}^n$ abbiamo che

$$f(\bar{v}) = f((x_1,\dots,x_n)) = f(x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + \dots + x_n\bar{e}_n) = \text{(per linearità)}$$

$$= \boxed{x_1 f(\bar{e}_1) + x_2 f(\bar{e}_2) + \dots + x_n f(\bar{e}_n)}.$$

Ad esempio se $f: \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ è lineare e se

$f(\bar{e}_1) = (1,0,-1)$, $f(\bar{e}_2) = (2,-1,0)$, $f(\bar{e}_3) = (2,3,4)$

allora $\forall\ \bar{v} = (x,y,z)$ abbiamo che

$$f(\bar{v}) = x f(\bar{e}_1) + y f(\bar{e}_2) + z f(\bar{e}_3) = x(1,0,-1) + y(2,-1,0) + z(2,3,4) =$$

$$= (x+2y+2z, -y+3z, -x+4z)$$

Se consideriamo la matrice A_f che ha per colonne i vettori $f(\bar{e}_1), f(\bar{e}_2), f(\bar{e}_3)$ rispettivamente, otteniamo che

$$A_f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+2z \\ -y+3z \\ -x+4z \end{pmatrix}$$

($\bar{v}$; $f(\bar{e}_1)$, $f(\bar{e}_2)$, $f(\bar{e}_3)$) è la colonna $f(\bar{v})$

cioè $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A_f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ($\bar{v}$, $\bar{v}$).

In generale vale il risultato seguente:

TEOREMA: C'è una corrispondenza biunivoca tra gli endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ e le matrici $n \times n$ a coefficienti in $\mathbb{R}$.

$$f \longleftrightarrow A_f$$

dove A_f è la matrice che ha per colonne rispettivamente i vettori $f(\bar{e}_1), f(\bar{e}_2), \dots, f(\bar{e}_n)$.

Per ogni $\bar{v} = (x_1,\dots,x_n) = P$ si ha

$$f(\bar{v}) = f(P) = f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A_f \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

ESEMPIO LE SIMMETRIE DEL QUADRIFOGLIO

$\{e, c, c^{-1}, \sigma_0, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_+, \sigma_-\}$ ($\leq \mathbb{E}^2$) sono tutte isometrie $f: \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ che tengono fisse l'origine, cioè $f(0,0) = (0,0)$.

Vedremo più tardi che di conseguenza sono endomorfismi, cioè sono lineari: $f(a\bar{u} + b\bar{v}) = a f(\bar{u}) + b f(\bar{v})$.

QUINDI SI POSSONO RAPPRESENTARE IN MODO UNIVOCO CON MATRICI

¿ QUALI MATRICI ?

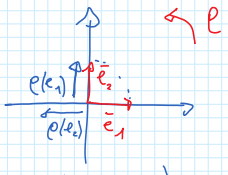
- $e: (x,y) \mapsto (x,y)$ $\quad A_e = ?$ $\quad \bar{e}_1 = (1,0) \mapsto e(\bar{e}_1) = (1,0)$, $\bar{e}_2 = (0,1) \mapsto e(\bar{e}_2) = (0,1)$

$$A_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Scrivendo i vettori $\bar{v} = (x,y)$ in colonna, cioè $\bar{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, vediamo che

$$e\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A_e \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- ρ



$\rho(e_1) = e_2 = (0,1)$

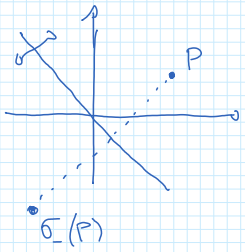
$\rho(e_2) = -e_1 = (-1,0)$

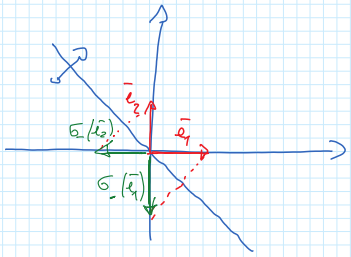
$$A_\rho = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \rho\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A_\rho \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

ad es. $\rho^2 \longleftrightarrow A_{\rho^2} = A_\rho A_\rho = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\rho^2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} = \sigma_0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- σ_-





$\sigma_-(\bar{e}_1) = -\bar{e}_2$, $\sigma_-(\bar{e}_2) = -\bar{e}_1$

$$A_{\sigma_-} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_{\sigma_-}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix}$$

- - - - - -

NB: • le colonne delle A_ρ così ottenute sono un sistema ortonormale, cioè le matrici A_ρ sono tutte ORTOGONALI

• se scambio le righe con le colonne delle A_ρ (cioè $A_\rho \mapsto A_\rho^t$ la matrice TRASPOSTA) vedo che

$$A_e^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = A_{\rho^{-1}} \qquad [\rho\rho^{-1} = e]$$

$$A_{\sigma_-}^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = A_{\sigma_-} \qquad [\sigma_-\sigma_- = e]$$

NOTA: L'endomorfismo $id : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^n$, $\bar{v} \mapsto \bar{v}$ ha per matrice

$$A_{id} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_n = \mathbb{1}_n = id_{\mathbb{F}^n}$$

ha per matrice $A_{id} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_n = 1_n = id_{\mathbb{E}^n}$

Se f e g sono due endomorfismi di $\mathbb{E}^n$, qual è la matrice $A_{g\circ f}$ associata all'endomorfismo $g\circ f$?

$$\mathbb{E}^n \xrightarrow{f} \mathbb{E}^n \xrightarrow{g} \mathbb{E}^n \qquad A_f,\ A_g$$

$$g\circ f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n \qquad g\circ f(\bar{v}) = g(f(\bar{v}))$$

$$A_{g\circ f} \ ?$$

$$g\circ f \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = g\left(f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = g\left(\underset{n\times n}{A_f}\underset{n\times 1}{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}\right) = A_g\left(A_f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \underbrace{A_g A_f}_{n\times n}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \boxed{A_{g\circ f} = A_g A_f}$$

OSSERV: f è biiettiva ($\Leftrightarrow$ si dice che l'endom. f è un ISOMORFISMO)

se e solo se $\exists\ f^{-1} : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ tale che

$f\circ f^{-1} = id \ \overset{e}{\wedge}\ f^{-1}\circ f = id$

$$\mathbb{E}^n \xrightarrow{f^{-1}} \mathbb{E}^n \xrightarrow{f} \mathbb{E}^n \qquad f\circ f^{-1}$$

$$\mathbb{E}^n \xrightarrow{f} \mathbb{E}^n \xrightarrow{f^{-1}} \mathbb{E}^n \qquad f^{-1}\circ f$$

cioè

se e solo se $\exists\ A_{f^{-1}}$ tale che

$A_f A_{f^{-1}} = I_n \ \overset{e}{\wedge}\ A_{f^{-1}} A_f = I_n$

DEF: Una matrice A $n\times n$ e coeff. in $\mathbb{R}$ si dice INVERTIBILE se e solo se $\exists\ A^{-1}$ matrice tale che $AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$

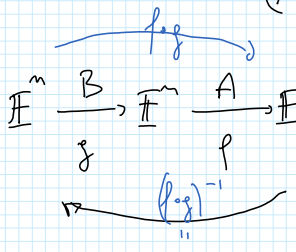
Abbiamo osservato che un endomorfismo f è un isomorfismo se e solo se A_f è una matrice invertibile

e $\boxed{A_f^{-1} = A_{f^{-1}}}$

ESERCIZIO: Se A e B sono matrici invertibili, allora lo è anche la matrice AB ? Sì, perché

corrisponde all'isomorfismo composto.

Chi è $(AB)^{-1}$?



$$(f\circ g)^{-1} = g^{-1}\circ f^{-1}$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Sì, infatti $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = (AI_n)A^{-1} = AA^{-1} = I_n$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}(I_nB) = B^{-1}B = I_n$$

OSSERVAZIONE: l'insieme degli isomorfismi è in biiezione con quello delle matrici invertibili. Contiene l'identità ed è chiuso per composizione (rispettivamente prodotto). In particolare formano un gruppo, detto

IL GRUPPO LINEARE DI $\mathbb{F}^n$, che si denota con

$$GL_n$$

Cioè $GL_n = \{ f : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n \mid f \text{ è isomorfismo} \}$, ∘ COMPOSIZIONE

$\cong \{ A \text{ matrice } n\times n \mid A \text{ è invertibile} \}$, · PRODOTTO

UN CENNO: c'è un modo "operativo" per controllare se una matrice A $n\times n$ è invertibile o meno; esso è piuttosto complesso, e passa attraverso il concetto di DETERMINANTE DI UNA MATRICE. Il risultato è il seguente: A è invertibile $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.

Noi studieremo da vicino, per comprendere le isometrie, un sottogruppo di GL_n, che è il sottogruppo O_n delle MATRICI ORTOGONALI.

Se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$ (RIGA i)

cioè a_{ij} è l'elemento di A che si trova nella riga i e colonna j

$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$ (COLONNA j)

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix} = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$$

$$AB = C = (c_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$$

chi è c_{ij}? È il risultato del prodotto scalare tra la riga i di A e la colonna j di B

cioè $$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{h=1}^{n} a_{ih}b_{hj}$$

Un caso speciale: partiamo da una sola matrice $A = (a_{ij})$ e consideriamo la sua TRASPOSTA A^t ottenuta da A scambiando le righe con le colonne:

ad es se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Se succede che $A = A^t$ diciamo che A è simmetrica

ad es $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ è simmetrica.

Calcoliamo $$AA^t = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}} (a_{ji})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}} = (c_{ij})_{i,j}$$

$$c_{ij} = \sum_{h=1}^{n} a_{ih}a_{jh} = a_{i1}a_{j1} + a_{i2}a_{j2} + \dots + a_{in}a_{jn} =$$

$$= (a_{i1} \dots a_{in}) \cdot (a_{j1} \dots a_{jn})$$

= prodotto scalare delle righe i per le righe j di A

Similmente per A^tA: c_{ij} = prodotto scalare delle colonne i per le colonne j di A

Infatti $\forall i, \forall j$ si ha $c_{ij} = \sum_{h=1}^{n} a_{hi}a_{hj}$.

DEF: Una matrice A si dice ORTOGONALE se le sue colonne sono vettori di modulo 1 e due a due ortogonali, cioè formano un insieme ORTONORMALE

colonne sono vettori di modulo 1 e due a due ortogonali, cioè formano un insieme ORTONORMALE DI VETTORI

ES: $A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ O.K.

$B = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ O.K

Sono tutte matrici ortogonali.

PROP: A è una matrice ortogonale se e solo se $A^t = A^{-1}$.

dim: $A^t = A^{-1} \iff A^t A = I_n$ (*) basta questa! $\iff$ detto $(c_{ij}) = A^t A$

$c_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ se } i=j \\ 0 \text{ se } i \neq j \end{cases}$

$\iff c_{ij} = \sum_{h=1}^{n} a_{hi} a_{hj} = \begin{cases} 1 \text{ se } i=j \\ 0 \text{ se } i \neq j \end{cases}$

$\iff$ prodotto scalare tra la colonna i e la colonna j di A è uguale a 1 se $i=j$, 0 altrimenti

$\iff$ le colonne di A sono un sistema ortonormale di vettori di $\mathbb{R}^n$.

$\iff$ A è ORTOGONALE

NB (*) basta, perché se $A^t A = I_n$ allora $\det(A^t A) = \det I_n = 1$

ma è anche vero che $\det(A^t A) = \det(A^t)\det(A) =$ (TEOREMA DI BINET)

$= \det(A)\det(A) = \det(A)^2$.

Quindi $\det(A)^2 = 1 \implies \det(A) = 1 \vee -1$, $\neq 0$.

Allora A è invertibile, cioè $\exists A^{-1}$. Per l'unicità dell'inverso, segue che $A^{-1} = A^t$ $\left(A^t = A^t I_n = A^t A A^{-1} = I_n A^{-1} = A^{-1}\right)$

Osserviamo che dalla dimostrazione della PROP. precedente, segue che anche le righe di A sono un sistema ortonormale di vettori.

COROLLARIO: L'insieme O_n delle matrici ortogonali è, con il prodotto matriciale, un sottogruppo di GL_n.

dim: $I_n \in O_n$ poiché $I_n^{-1} = I_n = I_n^t$. Poi, se $A, B \in O_n$ allora $A^t = A^{-1}$ e $B^t = B^{-1}$ così $(AB)^t = B^t A^t = B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$, e ciò dimostra che $AB \in O_n$. Infine se $A \in O_n$, cioè $A^t = A^{-1}$, allora anche $A^{-1} \in O_n$: infatti $A^{-1} = A^t$ ed allora $(A^{-1})^t = (A^t)^t = A = (A^{-1})^{-1}$ il che prova che $A^{-1} \in O_n$.

O_n è detto IL GRUPPO ORTOGONALE di $\mathbb{E}^n$.

DEF: Una trasformazione $f: \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ è detta ISOMETRIA se $d(P,Q) = d(f(P), f(Q)) \quad \forall P, Q \in \mathbb{E}^n$, ove d denota la distanza tra punti.

TEOREMA: Sia $\varphi: \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ una funzione arbitraria. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

(a) φ è una isometria e $\varphi(\bar{0}) = \bar{0}$.

(b) φ è lineare e $\forall \bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{E}^n$ risulta $\varphi(\bar{u}) \cdot \varphi(\bar{v}) = \bar{u} \cdot \bar{v}$

(c) φ è lineare e $\{\varphi(\bar{e}_1), \varphi(\bar{e}_2), \dots, \varphi(\bar{e}_n)\}$ è un sistema ortonormale.

(d) φ è una trasformazione ortogonale cioè $A_\varphi \in O_n$.

Ne omettiamo la dimostrazione. Ciò che si nota facilmente è che $(b) \Rightarrow (c) \Leftrightarrow (d)$.

1) $\bar{u} = \bar{v} = \bar{e}_i$

$\varphi(\bar{e}_i) \cdot \varphi(\bar{e}_i) = \bar{e}_i \cdot \bar{e}_i = 1$

$\| \varphi(\bar{e}_i) \|^2$

$\Rightarrow \| \varphi(\bar{e}_i) \| = 1$

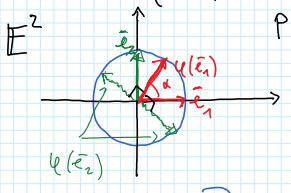
2) $\bar{u} = \bar{e}_i$, $\bar{v} = \bar{e}_j$ $i \neq j$

$\varphi(\bar{e}_i) \cdot \varphi(\bar{e}_j) = \bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = 0$

QUINDI, GRAZIE ALL'EQUIVALENZA (a)⇔(d), PER ANALIZZARE LE ISOMETRIE CHE TENGONO FISSA L'ORIGINE DOBBIAMO EQUIVALENTEMENTE STUDIARE LE TRASFORMAZIONI ORTOGONALI φ: POSSIAMO PROCEDERE ANALIZZANDO A FONDO LE LORO RAPPRESENTAZIONI IN MATRICI $A_\varphi \in O_n$.

Ci limitiamo qui a studiare il caso $n = 2$ (piano euclideo). Il caso $n = 3$ (spazio euclideo) ed i casi $n > 3$ sono più complessi ma gli strumenti sono i medesimi del caso $n = 2$.

Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O_2$. Allora $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \varphi(\bar{e}_1)$ e $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \varphi(\bar{e}_2)$ e così per la condizione (c) del Teorema precedente



$\exists \alpha \in [0, 2\pi[$ tale che:

- $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \varphi(\bar{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \varphi(\bar{e}_2) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \pi/2) \\ \sin(\alpha + \pi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \cos(\alpha - \pi/2) \\ \sin(\alpha - \pi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ -\cos\alpha \end{pmatrix} \end{cases}$

deve essere $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = 0$ cioè $\varphi(\bar{e}_1) \perp \varphi(\bar{e}_2)$

$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = 0$
cioè $\varphi(\bar{e}_1) \perp \varphi(\bar{e}_2)$

$\begin{pmatrix} \cos(\alpha - \pi/2) \\ \sin(\alpha - \pi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ -\cos\alpha \end{pmatrix}$

NB: $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

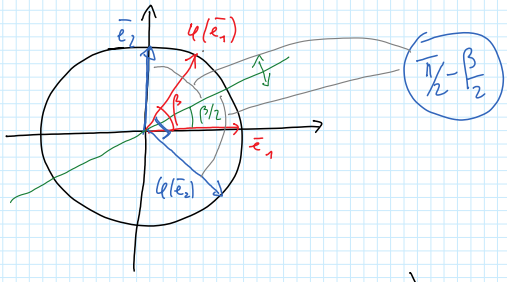
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

Riassumendo, le matrici $A \in \mathcal{O}_2$ sono di 2 tipi:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad B_\beta = \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix} : \ \alpha, \beta \in [0, 2\pi[$$

A_α è la rotazione antioraria attorno all'origine di un angolo α

B_β è la riflessione nella retta per l'origine che forma un angolo $\beta/2$ con l'asse delle ascisse



Ad esempio $A_0 = \begin{pmatrix} \cos 0 & -\sin 0 \\ \sin 0 & \cos 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{I}}_2$

e $B_0 = \begin{pmatrix} \cos 0 & \sin 0 \\ \sin 0 & -\cos 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \sigma_x$

la riflessione nell'asse delle x.

Qual è la tabella moltiplicativa di $\mathcal{O}_2$?

$A_{\alpha_2} A_{\alpha_1} = A_{\alpha_1 + \alpha_2}$ quindi le rotazioni formano un sottogruppo abeliano di $\mathcal{O}_2$

Osserv.: A_α ha ordine finito $\iff \alpha \in \mathbb{Q}\pi = \left\{ \frac{a}{b}\pi \mid \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \right\}$

$$B_{\beta_2} B_{\beta_1} = \begin{pmatrix} \cos\beta_2 & \sin\beta_2 \\ \sin\beta_2 & -\cos\beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta_1 & \sin\beta_1 \\ \sin\beta_1 & -\cos\beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta_1\cos\beta_2 + \sin\beta_1\sin\beta_2 & \sin\beta_1\cos\beta_2 - \cos\beta_1\sin\beta_2 \\ \cos\beta_1\sin\beta_2 - \sin\beta_1\cos\beta_2 & \sin\beta_1\sin\beta_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\beta_2 - \beta_1) & -\sin(\beta_2 - \beta_1) \\ \sin(\beta_2 - \beta_1) & \cos(\beta_2 - \beta_1) \end{pmatrix} = A_{\beta_2 - \beta_1}$$

$\Rightarrow$ le riflessioni NON formano un sottogruppo: la composizione di due riflessioni è una rotazione.

ESERCIZIO VERIFICARE CHE

due riflessioni e 1
una rotazione.

ESERCIZIO VERIFICARE CHE

1) $A_\alpha^{-1} = A_{-\alpha}$ 2) $B_\beta^{-1} = B_\beta$ 3) $B_\beta A_\alpha = B_{\beta-\alpha}$

4) $A_\alpha B_\beta = B_{\alpha+\beta}$

5) $B_\beta A_\alpha B_\beta = A_{-\alpha}$

Osserviamo infine che la simmetria centrale $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$ è data da $A_\pi = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Quindi vi è simmetria centrale ogni volta che vi è una simmetria di rotazione attorno ad O di ordine pari.