Vogliamo ora studiare il gruppo E_2 di tutte le isometrie del piano. Se $\psi \in E_2$, $\psi: \mathbb{E}^2 \longrightarrow \mathbb{E}^2$ è tale per cui $\psi(\bar{0}) = \bar{0}$, allora abbiamo visto la volta scorsa che un teorema ci garantisce che ψ è lineare, ed essa è una trasformazione ortogonale, cioè del tipo $A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ oppure $B_\beta = \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix}$ per opportuni angoli α (di rotazione) o β (di riflessione su $\beta/2$). Tali trasformazioni appartengono a quello che abbiamo chiamato GRUPPO ORTOGONALE O_2 DEL PIANO

$$O_2 = \left\{ \varphi: \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2 \;\middle|\; \varphi(P) = \varphi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{cases} A_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \text{oppure} \\ B_\beta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{cases} \right\}$$

Se invece $\psi(\bar{0}) = \bar{v} \neq \bar{0}$, allora detta $t_{\bar{v}}: \mathbb{E}^2 \longrightarrow \mathbb{E}^2$ la traslazione secondo $\bar{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$: $t_{\bar{v}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+v_x \\ y+v_y \end{pmatrix}$,

si ha che $t_{-\bar{v}} \circ \psi(\bar{0}) = t_{-\bar{v}}(\psi(\bar{0})) = t_{-\bar{v}}(\bar{v}) = \bar{0}$

così $t_{-\bar{v}} \circ \psi$ lascia fisso $\bar{0}$, ed allora $t_{-\bar{v}} \circ \psi \in O_2$ cioè

$$t_{-\bar{v}} \circ \psi = \varphi = \begin{cases} A_\alpha \\ \text{oppure} \\ B_\beta \end{cases} \quad \text{e dunque} \quad \psi = t_{\bar{v}} \circ \underbrace{t_{-\bar{v}} \circ \psi}_{\varphi} = t_{\bar{v}} \circ \varphi$$

In altre parole OGNI ISOMETRIA $\psi \in E_2$ DEL PIANO si lascia scrivere nella forma $\boxed{\psi = t_{\bar{v}} \circ \varphi}$, con

- $t_{\bar{v}} \in T_2$ (SOTTOGRUPPO DELLE TRASLAZIONI) e
- $\varphi = \begin{cases} A_\alpha \\ \text{oppure} \\ B_\beta \end{cases} \in O_2$ (SOTTOGRUPPO ORTOGONALE).

E_2 non è abeliano: vediamo come si comportano le moltiplicazioni:

- $t_{\bar{v}} \circ \varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} =$ oppure $A_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ oppure $B_\beta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$

- $\varphi \circ t_{\bar{v}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \varphi \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \right) = \varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \varphi \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = t_{\varphi(\bar{v})} \circ \varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
  (φ è lineare)
  $\neq t_{\bar{v}} \circ \varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

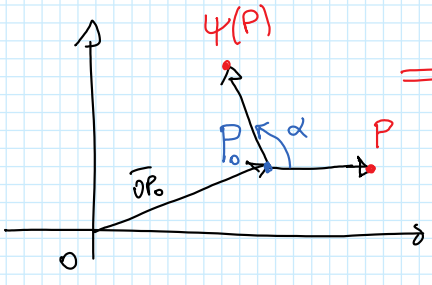
- $\varphi \circ t_{\bar{v}} \circ \varphi^{-1} = (\varphi \circ t_{\bar{v}}) \circ \varphi^{-1} = (t_{\varphi(\bar{v})} \circ \varphi) \circ \varphi^{-1} = t_{\varphi(\bar{v})} \circ (\varphi \circ \varphi^{-1}) = t_{\varphi(\bar{v})}$

- $t_{\bar{v}_2} \circ t_{\bar{v}_1} = t_{\bar{v}_1 + \bar{v}_2}$ e $t_{\bar{v}}^{-1} = t_{-\bar{v}}$ $\Rightarrow$ T_2 è un sottogruppo abeliano di E_2.

Nel gruppo E_2 possiamo ritrovare in particolare le seguenti isometrie notevoli:

ROTAZIONE DI UN ANGOLO α ATTORNO AD UN PUNTO P_0

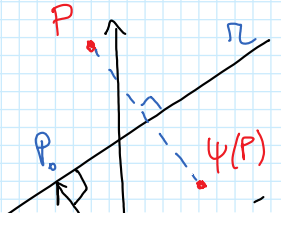
$t_{P_0} := t_{\overline{OP_0}}$



$\psi = t_{P_0} \circ A_\alpha \circ t_{P_0}^{-1} = t_{P_0} \circ (A_\alpha \circ t_{-P_0}) = t_{P_0} \circ (t_{A_\alpha(-P_0)} \circ A_\alpha) =$

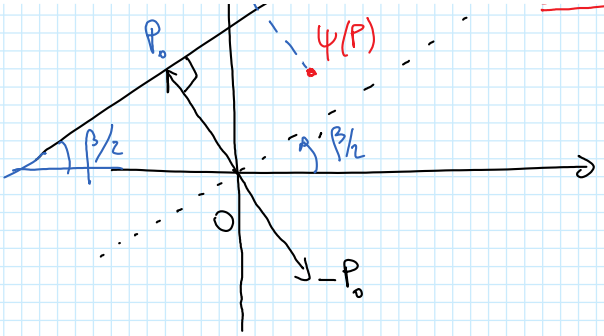
$= (t_{P_0} \circ t_{A_\alpha(-P_0)}) \circ A_\alpha = t_{P_0 - A_\alpha P_0} \circ A_\alpha$

RIFLESSIONE SU UNA ARBITRARIA RETTA r PER P_0 CON ANGOLO $\beta/2$



$\psi = t_{P_0} \circ B_\beta \circ t_{P_0}^{-1} = t_{P_0} \circ (B_\beta \circ t_{-P_0}) = t_{P_0} \circ (t_{B_\beta(-P_0)} \circ B_\beta) =$

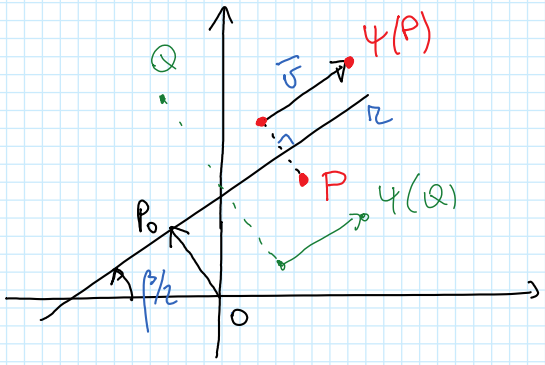
$= t_{\cdots} \circ B_\beta = t \circ B$



$$= t_{P_0 + B(-P_0)} \circ B_\beta = t_{2P_0} \circ B_\beta$$

$B(-P_0) = P_0$

GLISSO-RIFLESSIONE LUNGO UNA RETTA ARBITRARIA



$$\psi = \left(t_{\vec{v}} \circ t_{2P_0}\right) \circ B_\beta = t_{2P_0 + \vec{v}} \circ B_\beta$$

con $\overline{OP_0} \perp \vec{v}$ cioè $\overline{OP_0} \cdot \vec{v} = 0$

DIMOSTREREMO ORA CHE QUESTE TRE TIPOLOGIE DI ψ E LE PURE TRASLAZIONI COSTITUISCONO TUTTE LE POSSIBILI ISOMETRIE DEL PIANO. IN ALTRE PAROLE, NON VE NE SONO ALTRE.

Possiamo suddividere le isometrie del piano, cioè gli elementi del gruppo E_2, in due classi complementari:

- le isometrie DIRETTE, cioè quelle che si lasciano scrivere nella forma $t_{\vec{v}} \circ A_\alpha$ (cioè ROTAZIONE seguita da TRASLAZIONE)
- le isometrie INVERSE, cioè quelle che si lasciano scrivere nella forma $t_{\vec{v}} \circ B_\beta$ (cioè RIFLESSIONE seguita da TRASLAZIONE).

IL SEGUENTE RISULTATO CI CONSENTE FINALMENTE DI CLASSIFICARE TUTTE LE ISOMETRIE E_2 DEL PIANO:

TEOREMA:

a) Ogni isometria diretta $\psi = t_{\bar{v}} \circ A_\alpha$ è una pura traslazione oppure una rotazione attorno ad un opportuno punto P_0.

b) Ogni isometria inversa $\psi = t_{\bar{v}} \circ B_\beta$ è una riflessione oppure una glisso-riflessione lungo una opportuna retta.

dim: (a) Sia $\psi = t_{\bar{v}} \circ A_\alpha$, con $A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

Se $\alpha = 0$ allora $A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = id_{\mathbb{E}^2}$ e quindi ψ è una pura traslazione. Se invece $\alpha \neq 0$ consideriamo la trasformazione $id_{\mathbb{E}^2} - A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & 1-\cos\alpha \end{pmatrix} : \mathbb{E}^2 \longrightarrow \mathbb{E}^2$.

Tale trasformazione è un elemento di GL_2, infatti è lineare ed invertibile poiché ha determinante eguale a

$$(1-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha = 1 - 2\cos\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 2(1-\cos\alpha) > 0,$$

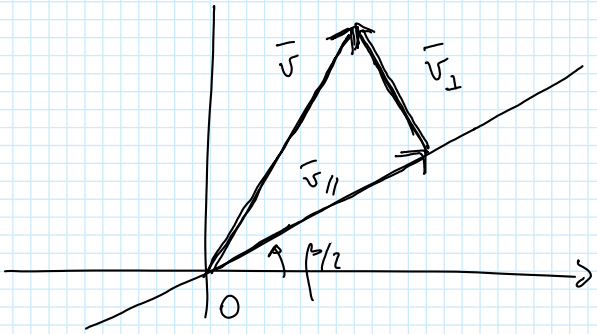
dal momento che stiamo assumendo che $\alpha \neq 0$.

Quindi esiste $P_0 \in \mathbb{E}^2$ tale che $(id_{\mathbb{E}^2} - A_\alpha)(P_0) = \bar{v}$ cioè $P_0 - A_\alpha P_0 = \bar{v}$, ma allora

$$\psi = t_{\bar{v}} \circ A_\alpha = t_{P_0 - A_\alpha P_0} \circ A_\alpha$$

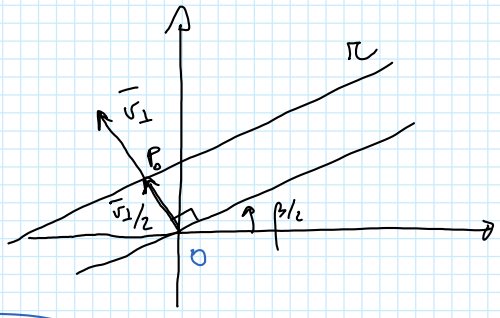
che dimostra che ψ è la rotazione attorno al punto P_0.

(b) Sia ora $\psi = t_{\bar{v}} \circ B_\beta$. Possiamo scomporre il vettore $\bar{v}$ nella somma $\bar{v} = \bar{v}_\perp + \bar{v}_{/\!/}$ delle componenti di $\bar{v}$ perpendicolare e la componente parallela alle rette per l'origine con angolo $\beta/2$:



Se $\bar{v}_{//} = \bar{0}$ allora $\bar{v} = \bar{v}_\perp$ e $\psi = t_{\bar{v}} \circ B_\beta = t_{2\frac{\bar{v}_\perp}{2}} \circ B_\beta$

che dimostra che ψ è la riflessione lungo la retta inclinata di un angolo di $\beta/2$ e che passa per il punto $P_0 = \bar{v}_\perp/2$



Altrimenti se $\bar{v}_{//} \neq 0$ allora dobbiamo che, posto $P_0 = \frac{1}{2}\bar{v}_\perp$,

$$\psi = t_{\bar{v}} \circ B_\beta = t_{\bar{v}_{//}+\bar{v}_\perp} \circ B_\beta = t_{\bar{v}_{//}+2P_0} \circ B_\beta \quad \text{con } P_0 \cdot \bar{v}_{//} = 0$$

che dimostra che ψ è una glisso-riflessione su π. #

DEF: Una **trasformazione frattale** è una isometria seguita da una omotetia, cioè $\delta : E^n \to E^n$ con

$$\delta(P) = \lambda\, \psi(P) \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R},\ \psi \in E_2$$

(λ: OMOTETIA; ψ: ISOMETRIA)

Una figura frattale $\hat{\mathcal{F}}$ si ottiene applicando ad una figura $\mathcal{F}$ una trasformazione frattale δ, con $0 < \lambda < 1$, ripetutamente, cioè

ripetutamente, così

$$\widehat{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \cup \delta(\mathcal{F}) \cup \delta^2(\mathcal{F}) \cup \dots = \bigcup_{i=0}^{+\infty} \delta^i(\mathcal{F}) \quad \text{dove}$$

$$\delta^0(\mathcal{F}) = \mathcal{F} \quad \text{e} \quad \delta^i(\mathcal{F}) = \underbrace{\delta(\delta(\delta \dots (\mathcal{F}))\dots)}_{i\text{-volte}} \quad \forall i > 0.$$