Alcuni aspetti delicati dell’Analisi Matematica. Modelli di crescita esponenziali, discreti e continui.

Sergio Zoccante
sergio.zoccante@gmail.com

L’Analisi nella Scuola Secondaria

Dipartimento di Matematica “Tullio Levi Civita”

Padova, 28 settembre 2018

Alcuni aspetti delicati dell’Analisi Matematica

In ricordo di Vinicio Villani

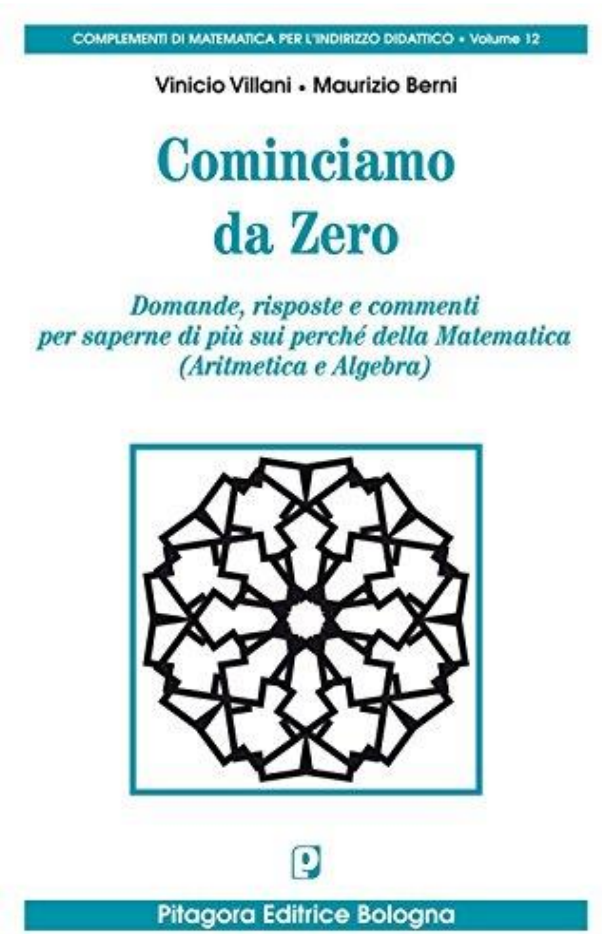
Nato il 3.4.1935 a Lussinpiccolo

(a quel tempo Italia, ora Croazia).

Morto il 3.2.2018 a Pisa.

Alcuni aspetti delicati dell’Analisi Matematica

Di Vinicio Villani:



Alcuni aspetti delicati dell’Analisi Matematica

Di Vinicio Villani e altri.

In tutti i casi:

Domande, risposte e commenti per saperne di più sui perché della matematica.

Retro di copertina:

Nell'infanzia si pongono i classici interrogativi con tanti "perché". Purtroppo poi, nel corso dell'educazione matematica, la curiosità diminuisce e spesso ci si accontenta di chiedere "come si fa?"

Alcuni aspetti delicati dell’Analisi Matematica

Non solo calcoli

I titoli dei capitoli sono domande

Capitolo 14

È più opportuno iniziare lo studio dell’analisi matematica a partire dalle successioni o dalle funzioni?

La domanda non è oziosa: nei corsi avanzati di analisi matematica può essere opportuno iniziare subito con le funzioni, declassando le successioni a caso particolare (funzioni aventi per dominio N). Per chi si avvicina per la prima volta all’analisi è invece preferibile un approccio a partire dalle successioni.

Alcuni aspetti delicati dell'Analisi Matematica

Questo perché, dal punto di vista dell'astrazione, il concetto di funzione si situa ad un livello di difficoltà piuttosto elevato.

Infatti, se già il numero è di per se un concetto astratto, anche se reso più familiare dall'uso frequente, la nozione di successione numerica è ancora più astratta, perché implica l'esistenza di un'infinità potenziale di numeri.

Anche in questo contesto c'è però una base di concretezza fondata sull'idea che si possono calcolare esplicitamente i primi *n* termini della successione (siano essi 10 o 100 o 1000 ...), e quindi si può prevederne (almeno nei casi più semplici) l'andamento al tendere di *n* all'infinito.

Alcuni aspetti delicati dell'Analisi Matematica

Nel caso delle funzioni (per esempio da **R** in **R**) ci troviamo ad un livello di astrazione ben maggiore perché l'esistenza dei valori assunti da una funzione anche in un'infinità numerabile di punti non consente in generale di dedurre il comportamento della funzione nella maggior parte degli altri valori, per cui non riusciamo a dominare completamente ed esplicitamente l'andamento di una funzione neppure su un piccolissimo intervallo del suo dominio.

(…) D'altra parte, anche se la definizione formale di funzione sembra semplice, in realtà le funzioni numeriche sulle quali si lavora in analisi presentano aspetti delicati, quali la continuità e la derivabilità, che i matematici hanno chiarito con difficoltà, dopo secoli di riflessioni.

Alcuni aspetti delicati dell’Analisi Matematica

(…) La definizione di Dirichlet, molto generale, porta all’attenzione dei matematici l’esistenza di funzioni strane, “patologiche” o “mostruose”, talvolta impossibili da visualizzare: di queste parleremo tra poco. Non sono però queste le funzioni portanti dell’analisi; lo sono invece un insieme di funzioni continue, o almeno *non troppo* discontinue: le funzioni elementari.

14.2.1 Le funzioni elementari

Per mettere un po’ d’ordine tra le infinite funzioni, ci basta osservare che in tutti questi secoli sono stati considerati sostanzialmente solo tre tipi di funzioni: le polinomiali, le esponenziali e le sinusoidali. … A partire da queste si ottengono praticamente tutte le altre funzioni di uso comune con particolari operazioni.

Alcuni aspetti delicati dell’Analisi Matematica

Capitolo 15

È proprio necessaria la nozione di limite? E perché se ne dà una definizione così lontana dall’idea intuitiva?

La domanda consta di tre parti, due esplicite (necessità, lontananza dall’idea intuitiva di limite) e una implicita (difficoltà).

Sulla necessità della nozione di limite, si può dire, senza troppa retorica, che essa sta alla base di tutta l’analisi matematica, la quale a sua volta sta alla base dei moderni sviluppi di tutte le scienze sperimentali, dell’ingegneria e delle scienze socio-economiche.

(…)

Alcuni aspetti delicati dell'Analisi Matematica

(…) **Commenti** 1. Da questi brevi cenni risulta evidente che la definizione di limite non è né semplice, né naturale. E tuttavia sembra eccessiva l'enfasi con cui la si affronta nelle nostre scuole.

Anche perché studenti che non hanno capito e che non sanno neppure recitare a memoria una definizione sensata di limite sono spesso in grado di superare le prove d'esame risolvendo correttamente un certo numero di esercizi tecnici piuttosto impegnativi. (…)

Alcuni aspetti delicati dell'Analisi Matematica

(Sulla teoria dell'analisi) 16.2

(…) Andrebbe poi discusso se la riorganizzazione in una teoria rigorosa, in particolare dell'analisi matematica, debba essere un obiettivo per tutti gli studenti di tutti gli indirizzi di scuola superiore. Bisogna infatti tenere presente che la quasi totalità degli studenti utilizzerà la matematica in modo strumentale nell'attività futura, e che un approccio troppo formale è, per la maggioranza delle persone, la causa principale della percezione della matematica come disciplina difficile e astrusa, e in conclusione inutile alla comprensione del mondo che ci circonda. Per un approfondimento su questo tema rinviamo a [Mumford, 1997].

Alcuni aspetti delicati dell’Analisi Matematica

16.3 Il Calculus.

Su questa linea si sono mosse alcune proposte, in particolare di origine anglosassone, di un approccio all’analisi che tenga conto di come avviene realmente la costruzione della matematica, e di quale sia l’utilizzo principale che gli studenti faranno, nella loro vita, della matematica stessa.

I corsi di Calculus (questo è il termine con cui usualmente si indica l’analisi matematica di base: limiti, derivate e integrali) sviluppati su queste idee si caratterizzano, di norma, per una semplificazione consistente (talvolta con l’eliminazione) della parte teorica sui limiti, e con una notevole riduzione delle dimostrazioni relative a derivate e integrali.

Alcuni aspetti delicati dell’Analisi Matematica

(Cap. 17) **Alcuni commenti sulle dimostrazioni.**

1. L’acquisizione di conoscenze matematiche passa attraverso varie fasi: esplorazione ingenua, formalizzazione (definizioni rigorose, enunciati rigorosi, dimostrazioni rigorose), analisi di esempi e controesempi.

Per chi userà la matematica solo in modo strumentale la parte “rigorosa” delle dimostrazioni può essere ridotta alle dimostrazioni di un paio di teoremi cruciali come quelli qui presentati per capire il metodo dimostrativo, limitandosi poi nel caso di altri teoremi ai soli enunciati purché questi siano correttamente compresi. In altri termini: a nostro parere è più importante capire cosa andrebbe dimostrato, che imparare a memoria i dettagli delle corrispondenti dimostrazioni.

Modelli di crescita esponenziali, discreti e continui.

Da una simulazione di esame di maturità

La curva nord

…

Al termine della manifestazione gli spettatori defluiscono dall'impianto; in base alle osservazioni degli anni scorsi ogni minuto esce dall'impianto il 5% degli spettatori presenti all'interno nel minuto precedente.

3) Determina la funzione che meglio rappresenta il deflusso degli spettatori, e, indicando con $t=0$ l'apertura dei cancelli e t_c (da determinare) l'istante in cui, durante il deflusso, nell'impianto restano meno di 100 spettatori, disegna il grafico della funzione che rappresenta il numero di spettatori presenti nell'impianto nell'intervallo $[0;\ t_c]$; ipotizza che l'impianto sia riempito alla massima capienza e che la manifestazione sportiva duri un'ora. Determina inoltre la massima velocità di deflusso degli spettatori dall'impianto.

Modelli di crescita esponenziali, discreti e continui.

Le soluzioni proposte:

<u>Prima ipotesi soluzione quesito 3 e 4:</u>

Indichiamo con t_0 il tempo a cui la manifestazione termina e inizia il deflusso; questo è descritto dalla relazione:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = -0{,}05N(t) = -\frac{N(t)}{20} \Rightarrow N(t) = N_{\max} e^{-(t-t_0)/20}$$

<u>Seconda ipotesi soluzione quesito 3 e 4:</u>

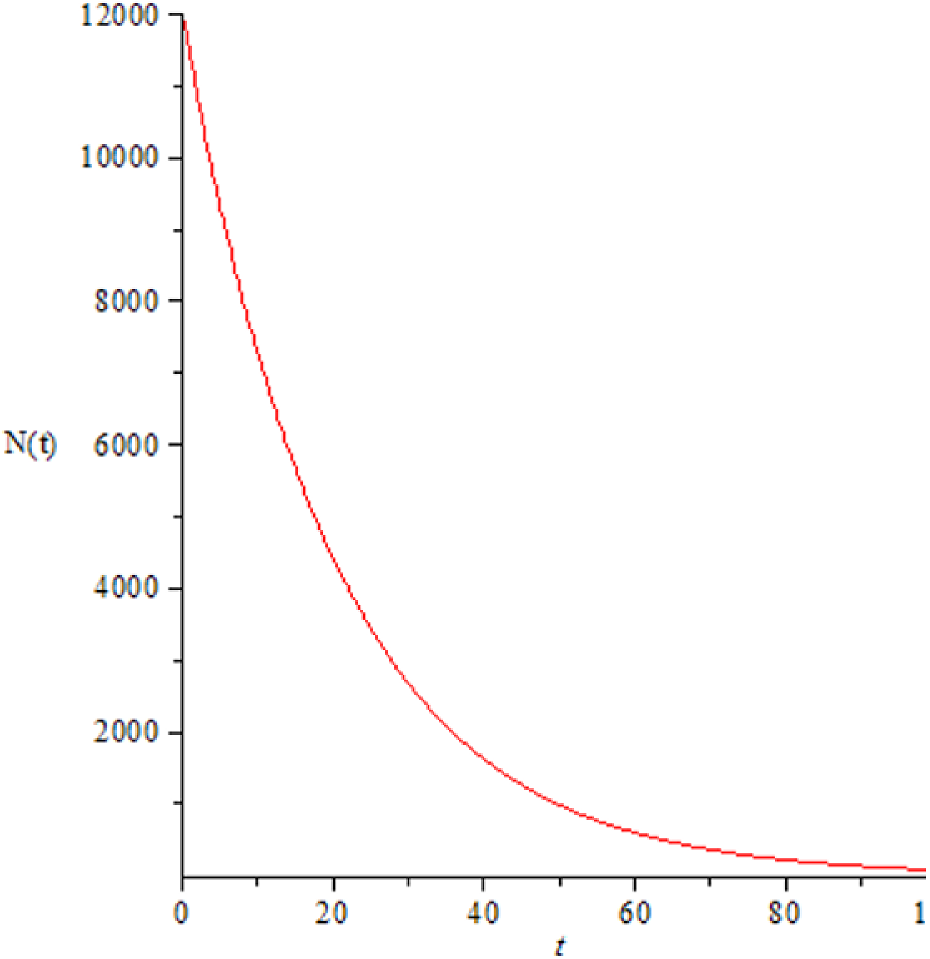
Indicando con N_{max} il numero di spettatori presenti al termine della manifestazione, poiché in ogni minuto defluisce il 5% degli spettatori presenti un minuto prima, in ogni minuto il numero di spettatori ancora presenti all'interno dell'impianto è il 95% di quelli presenti un minuto prima.

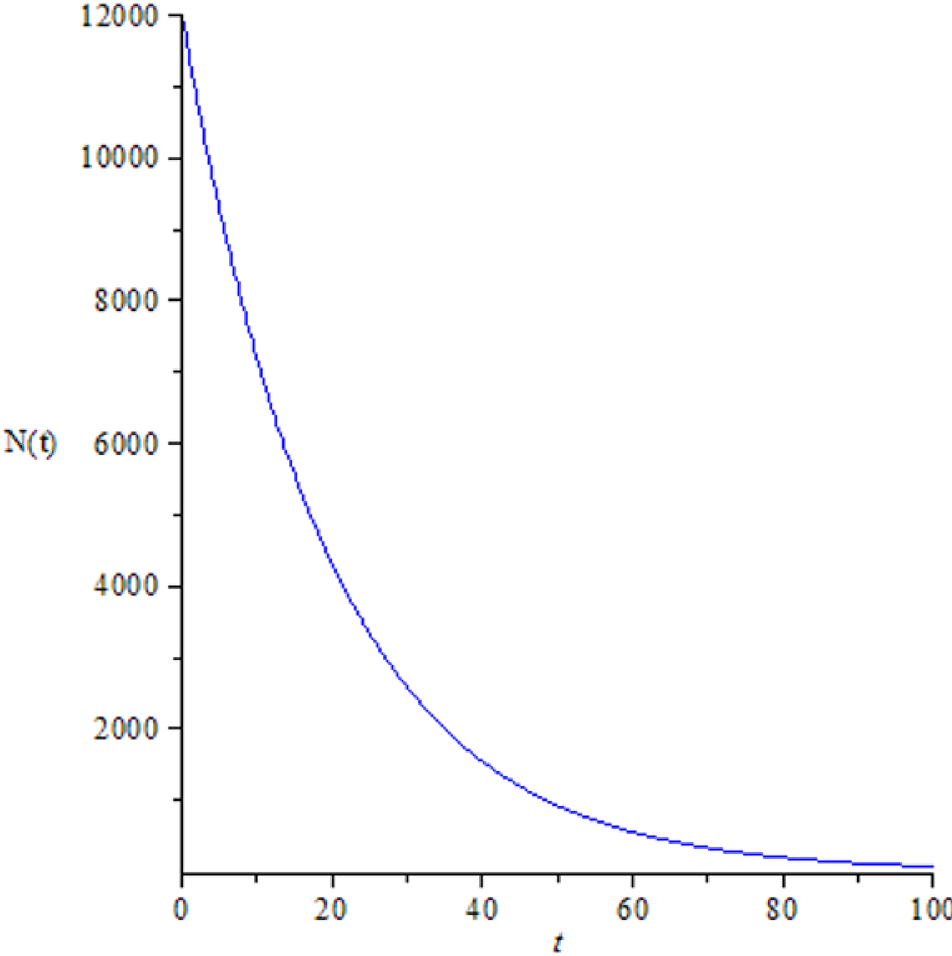
Quindi $N(t_i) = N(t_{i-1}) \cdot 0{,}95$, e quindi $N(t_i) = N_{\max} \cdot 0{,}95^i$

Andamento della funzione $N(t) = 12000 \cdot 0{,}95^{t-t_0}$

Modelli di crescita esponenziali, discreti e continui.

Seguono i due grafici





Modelli di crescita esponenziali, discreti e continui.

E le soluzioni terminano così:

<u>**Nota :**</u> Modellizzando l'uscita degli spettatori con la funzione $N(t)=12000\cdot 0{,}95^{t-t_0}$ il numero medio risulta essere 6131 anziché 6102 che si ottiene con la funzione $N(t)=12000\cdot e^{-(t-t_0)/20}$, entrambe le curve sono sovrapponibili nell'andamento e le due soluzioni per $\overline{N}$ hanno uno scarto dello 0,47%

Modelli di crescita esponenziali, discreti e continui.

Quale il modello *migliore* per cominciare?

Un caso semplice

La torta millefoglie

LA PASTA SFOGLIA step by step, *metodo francese di* ***Paul Bocuse***

Read more: https://aniceecannella.blogspot.com/2009/11/la-pasta-sfoglia-passo-passo.html#ixzz5SEDRoZ9L

Modelli di crescita esponenziali, discreti e continui.

Indichiamo con *g* il numero di giri, con *n* il numero di strati

Abbiamo:

g	*n*
1	3
2	9
3	…
4	
5	
6	$3^6 = 729$

In questo caso, il modello *naturale* è

$$n(g) = 3^g$$

Modelli di crescita esponenziali, discreti e continui.

Secondo caso: un problema classico

Consideriamo una coltura di batteri in presenza di fonti inesauribili di cibo e senza antagonisti. Indicando con p_0 il numero di batteri presenti all'istante $t_0 = 0$ e sapendo che la popolazione raddoppia ogni tre ore (tempo di duplicazione), quale sarà la popolazione dopo due ore? E dopo n ore? Dopo quanto tempo la popolazione sarà triplicata? Se d è il tasso di variazione in un'ora, esprimere in funzione di d il tasso di variazione per vari multipli e sottomultipli di ora.

Modelli di crescita esponenziali, discreti e continui.

1. Indichiamo con *p* la popolazione, con *n* il tempo (in ore).

   Assunzione ragionevole: dopo 1 ora, la variazione di *p* è direttamente proporzionale a *p* stessa.

$$p(n+1) - p(n) = p(n) \cdot d$$

   dove *d* è il *tasso di crescita discreto*.

   (Abbiamo fatto implicitamente altre assunzioni?)

Modelli di crescita esponenziali, discreti e continui.

Ricaviamo

$$p(n+1) = p(n) + p(n) \cdot d = p(n) \cdot (1+d)$$

E, generalizzando

$$p(n) = p(0) \cdot (1+d)^n \qquad (1)$$

Posto 1+*d* = *k*, si ha

$$p(n) = p(0) \cdot k^n \qquad (1^*)$$

Modelli di crescita esponenziali, discreti e continui.

2. Estendiamo il dominio a **R** :

$$p(t) = p(0) \cdot k^t$$

(Quali assunzioni facciamo con questo passaggio?)

Ora: $p(3) = 2p(0)$ da cui $p(0)k^3 = 2p(0)$

$$k^3 = 2 \qquad k = 2^{1/3} \qquad d = 2^{1/3} - 1$$

Modelli di crescita esponenziali, discreti e continui.

In generale, se T è il *tempo di duplicazione*

$$p(T) = 2p(0) \quad \text{da cui} \quad k^T = 2$$

$$k = 2^{1/T} \qquad\qquad d = 2^{1/T} - 1$$

L'equazione diventa allora

$$p(t) = p(0) \cdot 2^{\frac{t}{T}} \tag{2}$$

(Analogamente se T è il *tempo di dimezzamento)*

Modelli di crescita esponenziali, discreti e continui.

3. Naturalmente, le equazioni (1) e (2) possono essere riscritte in base qualsiasi. In genere, si usa la base *e*:

$$p(t) = p(0) \cdot e^{\lambda t} \qquad (3)$$

dove, per la proprietà di cambio base,

$$\lambda = \ln(1 + d)$$

λ è chiamato tasso istantaneo di crescita.

Perché questo nome?

Modelli di crescita esponenziali, discreti e continui.

Facciamo un passo indietro.

Da $p(t) = p(0) \cdot k^t$ posto $\Delta t = h,$ si ha

$$\frac{p(t+h) - p(t)}{p(t)} = \frac{p(0)k^{t+h} - p(0)k^t}{p(0)k^t} = k^h - 1$$

Quindi: l'incremento *relativo* nell'intervallo *h* è *indipendente* dall'istante *t* considerato

Se *h*=1, ritroviamo il vecchio *d*.

Modelli di crescita esponenziali, discreti e continui.

Indichiamo con λ_h l'incremento relativo medio

nell'intervallo *h*: $\lambda_h = \frac{k^h - 1}{h}$

Il *tasso istantaneo* λ è definito come il *limite* di λ_h

$$\lambda = \lim_{h \to 0} \frac{k^h - 1}{h} = \cdots = \ln(k) = \ln(1 + d)$$

Quindi $\lambda = \ln(1 + d)$ e $d = e^{\lambda} - 1$

Modelli di crescita esponenziali, discreti e continui.

- Torniamo al problema della simulazione

<u>Prima ipotesi soluzione quesito 3 e 4:</u>

Indichiamo con t_0 il tempo a cui la manifestazione termina e inizia il deflusso; questo è descritto dalla relazione:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = -0{,}05N(t) = -\frac{N(t)}{20} \Rightarrow N(t) = N_{\max} e^{-(t-t_0)/20}$$

<u>Seconda ipotesi soluzione quesito 3 e 4:</u>

Indicando con N_{max} il numero di spettatori presenti al termine della manifestazione, poiché in ogni minuto defluisce il 5% degli spettatori presenti un minuto prima, in ogni minuto il numero di spettatori ancora presenti all'interno dell'impianto è il 95% di quelli presenti un minuto prima.

Quindi $N(t_i) = N(t_{i-1}) \cdot 0{,}95$, e quindi $N(t_i) = N_{\max} \cdot 0{,}95^i$

Andamento della funzione $N(t) = 12000 \cdot 0{,}95^{t-t_0}$

Modelli di crescita esponenziali, discreti e continui.

Nota degli estensori

Nota : Modellizzando l'uscita degli spettatori con la funzione $N(t) = 12000 \cdot 0{,}95^{t-t_0}$ il numero medio risulta essere 6131 anziché 6102 che si ottiene con la funzione $N(t) = 12000 \cdot e^{-(t-t_0)/20}$, entrambe le curve sono sovrapponibili nell'andamento e le due soluzioni per $\overline{N}$ hanno uno scarto dello 0,47%

Analizziamo i due modelli.

1. $N(t) = 12\,000(0.95)^{t-t(0)}$
2. $N(t) = 12\,000e^{-(t-t(0))/20}$

Si considerano cioè equivalenti (in qualche senso)

$e^{-\frac{1}{20}}$ e 0,95

Modelli di crescita esponenziali, discreti e continui.

Come è possibile questo?

Con le notazioni precedenti, si ha $d = -0{,}05$

1. $N(t) = 12\,000(1 + d)^{t - t(0)}$

2. $N(t) = 12\,000e^{d \cdot (t - t(0))}$

Quindi, si è posto tasso istantaneo λ = tasso discreto *d*.

Modelli di crescita esponenziali, discreti e continui.

Che cosa comporta questo?

Stimiamo la differenza.

Sviluppiamo in serie:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \dots$$

Quindi

$$e^{-1/20} = 1 - \frac{1}{20} + \frac{1}{2 \cdot 400} - \cdots$$

$$0{,}95 = 1 - \frac{1}{20}$$

È accettabile?

Modelli di crescita esponenziali, discreti e continui.

Grazie

Bibliografia minima

V. Villani, *Cominciamo da zero.* Pitagora, 2003

V. Villani, *Cominciamo dal punto.* Pitagora, 2006

V. Villani, C. Bernardi, R. Porcaro, S. Zoccante, *Non solo calcoli Domande e risposte sui perché della matematica,* Springer Ed., 2012

U. Marconi, *Appunti*, in www.math.unipd.it/~umarconi/did/exp.pdf