L'Analisi Matematica nella Scuola Secondaria
Padova, 28 settembre 2018

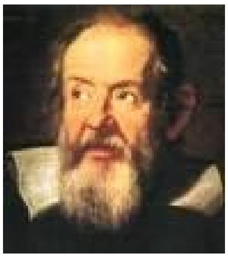
Il Calcolo di Newton nella Scuola Superiore.
Un percorso innovativo sulla via delle competenze

Anna Salvadori – Primo Brandi

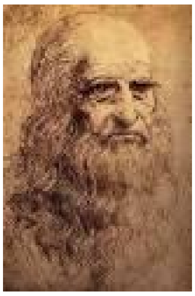
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Perugia
anna.salvadori@unipg.it

Premessa

La Matematica linguaggio della Scienza e della Tecnologia



"La filosofia naturale è scritta in **questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi, io dico l'universo, ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua e conoscer i caratteri nei quali è scritto**. Egli **è scritto in lingua matematica**, e i caratteri son triangoli, cerchi ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro labirinto."
Il Saggiatore, Galileo Galilei (1564-1642).

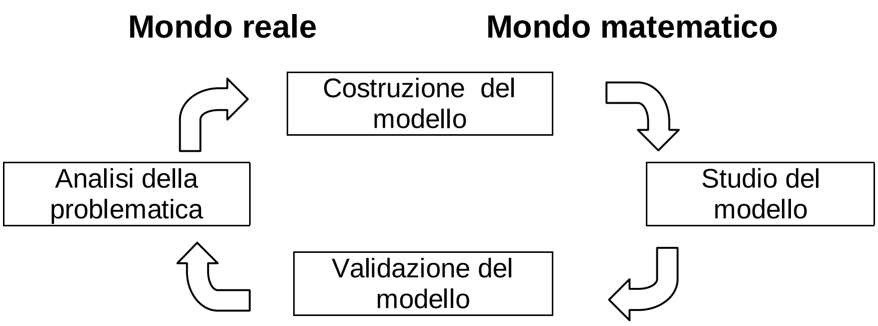


Nessuna investigazione si può dimandare vera scienza, s'essa non passa per le matematiche dimostrazioni;
... non mi legga chi non è matematico nelli mia principia; **nessuna certezza è dove non si può applicare una delle scienze matematiche,** over che non sono unite con esse matematiche.
Trattato della pittura, Leonardo Da Vinci (1452-1519)

La dinamica della modellizzazione come motore di innovazione didattica [3]

Educare alla modellizzazione comporta un modo diverso di proporre lo studio della Matematica, rivolto alla descrizione e comprensione del mondo reale.
Il modello matematico di un "fenomeno" del mondo reale è un processo di razionalizzazione ed astrazione che consente di analizzare il problema, descriverlo in modo oggettivo e formulare una sua "simulazione", utilizzando un linguaggio simbolico universale.
Il processo di modellizzazione procede per fasi successive, che creano un'interazione dinamica fra mondo reale e mondo matematico.

Il modello matematico



Fasi del processo di modellizzazione

Fase 1 Analisi della problematica. Si prende in esame la problematica in oggetto e si cerca di stabilire quali siano i dati noti e quali quelli incogniti. Si individuano eventuali legami tra le variabili in gioco e/o eventuali vincoli imposti dalla situazione.

Fase 2 Costruzione del modello. Dopo aver eventualmente semplificato il problema da affrontare (es. eliminando alcune variabili o scomponendo il problema in sotto-problemi) si traduce la questione in relazioni matematiche tra i dati e le incognite.

Le prime due fasi costituiscono il passaggio dal mondo reale al mondo matematico: il problema o il fenomeno da analizzare vengono "tradotti in linguaggio" matematico (modello).

Fase 3 Studio del modello. La fase si svolge tutta all'interno del mondo matematico con l'elaborazione del modello. Si discute e (se possibile) si risolve il modello matematico. Importante distinguere i tre aspetti: esistenza, unicità, calcolo delle soluzioni (esatto o approssimato)

La costruzione e lo studio del modello promuovono un'analisi critica del problema che porta a formulare giudizi, valutare possibili soluzioni e/o fare previsioni sulla evoluzione futura.

Fase 4 Validazione del modello. Dal mondo matematico, si torna al mondo reale per confrontare la soluzione del modello con il problema iniziale. Questo raffronto è fondamentale in quanto consente di valutare la *bontà* del modello, cioè di stabilire se il modello è rispondente alle esigenze della problematica in oggetto.

Se la verifica delle soluzioni trovate "a tavolino" rivela delle inadeguatezze *con la realtà*, si può procedere a un secondo processo di modellizzazione, che tenga conto delle questioni emerse nel primo tentativo. Si individua così un modello più adatto a gestire il problema in esame.
Successivi perfezionamenti o varianti conducono ad un prototipo virtuale via via più efficiente. Questa progressiva evoluzione richiede in genere strumenti e tecniche matematiche sempre più complessi e articolati.

Potenzialità della modellizzazione

Grazie all'astrazione matematica, uno stesso modello è in grado di rappresentare fenomeni, anche in ambiti molto diversi. Inoltre strumenti e tecniche possono essere adattati e/o assemblati per gestire nuove problematiche, un po' come si fa con le costruzioni *Lego*[1], in cui pochi elementi base permettono di realizzare una grande varietà di strutture, anche molto complesse. E' in questa duttilità e generalità che risiede gran parte della potenza del processo di modellizzazione.

Modellizzazione e strategie didattiche

Visti gli spazi sempre più esigui riservati all'insegnamento della matematica, non è proponibile una educazione alla modellizzazione *come scoperta*, ma la si può guidare come *bisogno intellettuale*. Ricorrendo alle collaudate tecniche di marketing, gli insegnanti dovrebbero far nascere negli studenti, di volta in volta, "nuovi bisogni di curiosità intellettuale" per poi *guidarli* sulla *via della loro soddisfazione*.
La stessa dinamica della modellizzazione dovrebbe guidare il percorso di insegnamento-apprendimeto.

Fasi 1-2 Partendo da situazioni e problematiche della realtà, con l'obiettivo della loro formalizzazione matematica (modello), si possono introdurre in modo naturale concetti e strumenti

Fase 3 matematici che vengono acquisiti e testati nella fase dello studio del modello matematico.

Fase 4 La fase di validazione del modello consente di perfezionare gli strumenti, riflettere sulla teoria e far emergere nuove esigenze.

[1] Le costruzioni Lego sono state introdotte recentemente come strumento didattico nelle scuole primarie.

ping-pong

A sua volta, l'acquisizione di strumenti matematici sempre più potenti permette di affrontare problemi più complessi o di operare una "rilettura" di quelli già affrontati.
In questo modo, come in un gioco a ping-pong tra mondo reale e mondo matematico, il percorso si evolve in un'elica ascendente.

Alcune raccomandazioni

L'esperienza maturata negli ultimi 20 anni nei laboratori Matematica&Realtà, nonché nei nostri corsi universitari, ci induce a formulare alcuni suggerimenti per chi intende intraprendere il percorso di educazione alla modellizzazione.

Intuizione e formalizzazione

Introdurre i concetti privilegiando un approccio intuitivo e costruttivo, per passare solo in un secondo tempo alla formalizzazione rigorosa ed alla trattazione della teoria.
Incoraggiare gli studenti a proporre loro stessi definizioni e a costruire dimostrazioni.

4 aspetti

Strumenti e tecniche dovrebbero essere presentati avvalendosi di quattro aspetti: la descrizione verbale (linguaggio naturale), la rappresentazione qualitativa (aspetto grafico-geometrico), la valutazione quantitativa (aspetto numerico), la formalizzazione simbolica (linguaggio matematico).
Le rappresentazioni multiple incoraggiano gli studenti a riflettere sul significato di quanto viene loro proposto.

Problemi veri

Si raccomanda di proporre **solo problemi veri**, non verosimili!
Le problematiche saranno tratte dalle mille proposte offerte dalla vita quotidiana (reperibili attraverso giornali, TV, internet, depliants pubblicitari, …) presentati nel loro contesto originale, né adattati, né semplificati, al fine di consentire una corretta educazione alla modellizzazione.

Esercizi intelligenti

Ridurre al minimo gli esercizi di routine, privilegiando le questioni che richiedono il coinvolgimento dello studente ed invitano alla riflessione.

Atteggiamento studenti

Le parole chiave del percorso di apprendimento sono: *esplorare*, *comprendere*, *comunicare*.
Gli studenti dovrebbero essere incoraggiati a scrivere e leggere argomentazioni matematiche, discutere e riflettere sui concetti, confrontare strumenti e tecniche.
In ogni fase del percorso di apprendimento dovrebbero essere in grado di riflette su *cosa stanno facendo*, *perché lo fanno* e *cosa si aspettano che accada*.

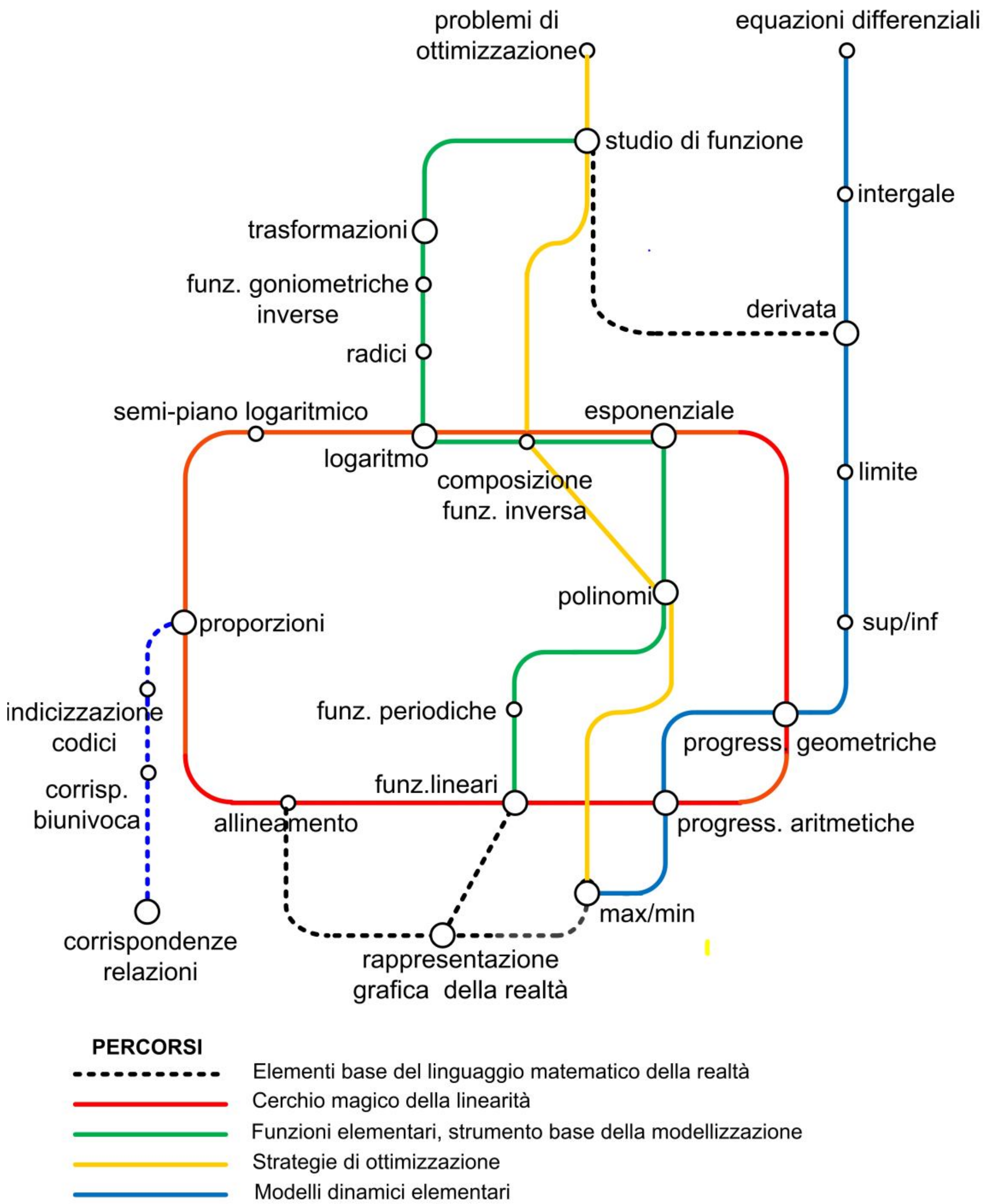
Nuove tecnologie

Le nuove tecnologie offrono un'importante strumento educativo non solo perché, sollevando dagli aspetti più tecnicistici, permettono di dedicare più tempo alla comprensione dei concetti, ma anche perché pongono i ragazzi di fronte a difficoltà ed imprevisti che, se gestiti in modo consapevole e riflessivo, costituiscono un'occasione preziosa di crescita culturale.

La nostra esperienza ha evidenziato che ancorare l'insegnamento della matematica alla vita reale, oltre a stimolare l'interesse, favorisce la partecipazione attiva e responsabile, sviluppa un'attitudine sperimentale nei confronti della matematica, rende consapevoli delle potenzialità del linguaggio matematico e permette di valutare le proprie conoscenze, abilità e competenze.

Matematica&Realtà

Un percorso MATH-mps - modelli dinamici elementari



Percorso blu - modelli dinamici elementari

FOTO - filmini SUPER 8 - MOVIE

1. Modelli di crescita/decadimento - CASO DISCRETO

limite

2. Modelli di Malthus e Newton

derivata

3. Dai modello discreto al MODELLO CONTINUO

integrale

4. Ulteriori potenzialità del modello continuo

1. Introduzione ai modelli dinamici

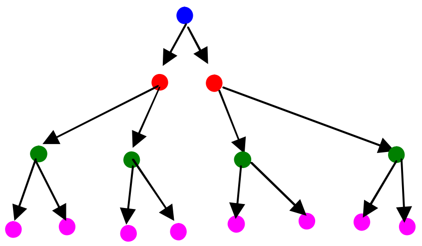
Mitosi cellulare

La mitosi è il processo mediante il quale, per fasi successive, da una cellula *diploide* (con patrimonio di cromosomi completo) se ne formano due con lo stesso patrimonio cromosomico. Ciò è possibile in quanto nella prima fase di mitosi il DNA raddoppia e ogni cromosoma si duplica.

Costruzione del modello

approccio grafico

stadio	n. cellule
0	N_0
1	N_1
2	N_2
⋮	⋮
k	N_k



approccio formale

Processo iterativo

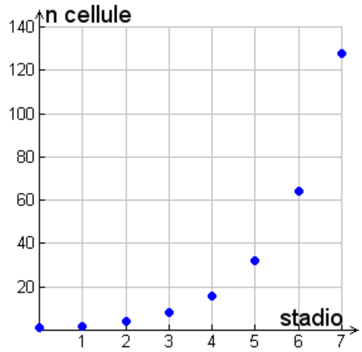
(1) $$\begin{cases} N_0 & start \\ N_k = 2 \cdot N_{k-1} & k = 0,1,2,\ldots \end{cases}$$

Dalla (1) si deduce

$$N_k = 2^k \cdot N_0$$

Progressione geometrica

costituisce una **progressione geometrica** di ragione $m = 2$.



Kerosene per jet

Le leggi federali degli USA prescrivono di depurare il kerosene utilizzato come carburante dei jet, mediante un'operazione di filtraggio attraverso un'apposita condotta contenente argilla.

Processo iterativo

$$\begin{cases} P_0 & start \\ P_{n+1} = \left(1 - \dfrac{k}{100}\right) P_n & n \in N \end{cases}$$

- k denota la percentuale di impurità che un *foot* di condotta riesce ad eliminare;
- P_0 è la percentuale di sostanze inquinanti iniziale;

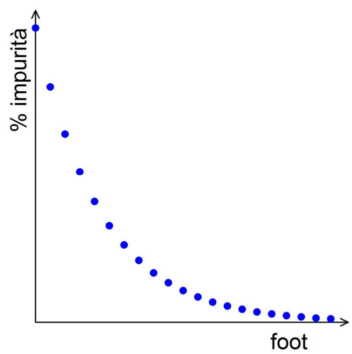
  P_n è la percentuale di sostanze inquinanti presente dopo aver usato n filtri (cioè utilizzando una condotta lunga n *feet*).

Progressione geometrica

$$\boxed{P_n = \left(1 - \frac{k}{100}\right)^n P_0} \qquad n \in N$$

Evoluzione asintotica

$$\inf P_n = 0$$



processo iterativo generato da una trasformazione T,

$$\begin{cases} x_0 \quad start \\ x_{n+1} = T\left(x_n\right) \end{cases} \quad n = 0,1,2,\ldots \quad \Rightarrow \quad x_n = x_0 \cdot k^n$$

le successione delle iterate è una progressione geometrica

2. Due modelli notevoli

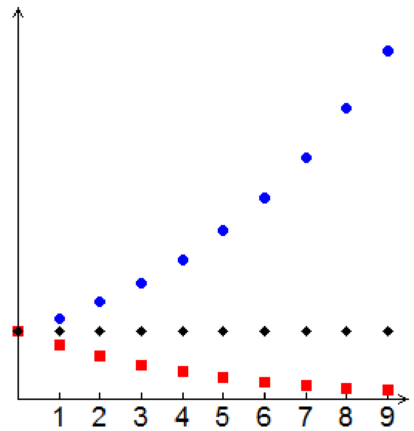
Modello di Malthus in dinamica delle popolazioni

L'economista inglese Thomas Malthus nel 1798 ipotizza che **il tasso di crescita** di una *popolazione isolata* **sia direttamente proporzionale al numero di individui**

$$\Delta x = x_{n+1} - x_n = a\, x_n$$

$$\begin{cases} x_0 & start \\ x_{n+1} = x_n + a\, x_n = (1+a)x_n \end{cases} \Rightarrow \quad x_n = (1+a)^n\, x_0$$

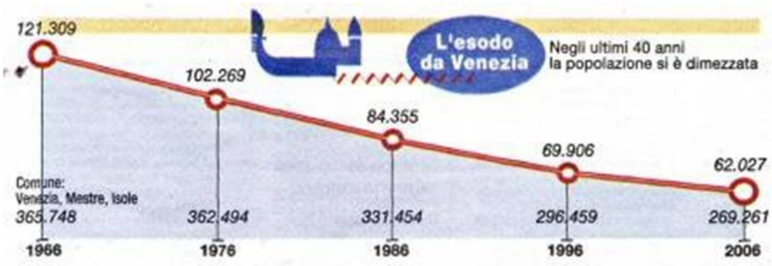
fattore di crescita	evoluzione del processo
$a < 0$	estinzione
$a = 0$	processo stazionario (crescita zero)
$a > 0$	esplosione



La *morte* di Venezia

“Venezia nel 2030: una città vuota, niente abitanti, ma solo turisti”.

Dal 1966 (anno dell’alluvione) ad oggi, il centro storico di Venezia ha perso *la metà dei suoi abitanti*. Degli attuali abitanti, 3000 sono stranieri. Secondo l’Assessore alla casa “stiamo andando oltre il limite di guardia; superato questo, Venezia non sarà più una città normale, ma si trasformerà in una mera meta turistica, e perderà il suo fascino anche per i turisti stessi”.Fonte: “La Repubblica”, 25.8.06



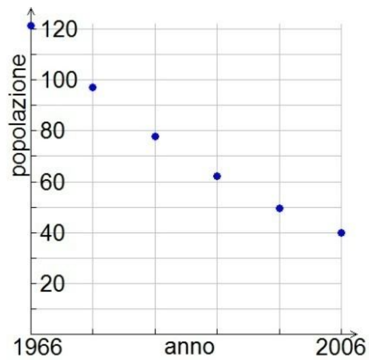
Modello di Malthus

$$\begin{cases} P_0 = 121.309 \quad start \\ P_{n+1} - P_n = 0,2P_n \end{cases} \qquad n = 0,1,2,...$$

stadio = 10 anni

$$P_n = P_0\,(0,8)^n$$

tempo di dimezzamento 40 anni



Legge di Newton di reffreddamento/riscaldamento

Il caffè versato in una tazzina si raffredda secondo la legge di Newton:
la **variazione di temperatura** (**gradiente termico**).è proporzionale alla differenza di temperatura tra il caffè e l'ambiente (**salto termico**).

$$\begin{cases} T_0 & start \\ T_{n+1} - T_n = k\left(T_n - T_a\right) \end{cases} \qquad n = 0, 1, 2...$$

- T_a la temperatura dell'ambiente;
- T_n la temperatura del liquido all' n -esimo stadio $n = 0, 1, 2..$

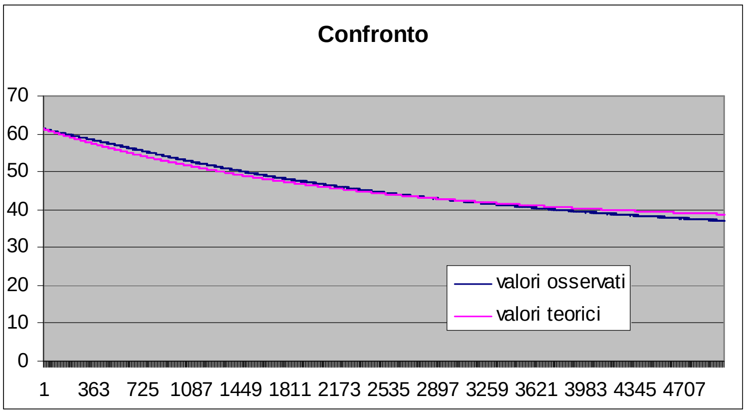
Introducendo, **come variabile ausiliaria, il salto termico**

$$S_n = T_n - T_a$$

il sistema diventa

$$\begin{cases} S_0 & start \\ S_{n+1} = (1+k) S_n \end{cases} \qquad n = 0, 1, 2... \quad \Rightarrow \quad S_n = (1+k)^n S_0$$

cioè si ottiene ancora il modello di Malthus!



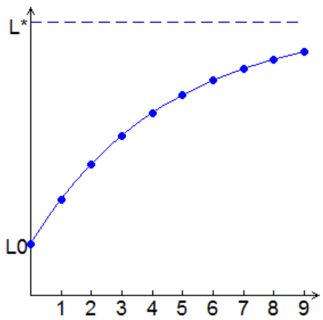
Temperatura ambiente	$29\ ^0C$
Durata di ogni test	45 minutes
Numero delle letture	4500
approssimazione	$\pm 0{,}01\ ^0C$
Temperatura iniziale	$70 \div 75\ ^0C$
Temperatura finale	$34 \div 38\ ^0C$

Lunghezza dei pesci

Secondo gli studi del biologo Ludwig von Bertalanffy il tasso di crescita (lunghezza) di alcune specie di pesci è proporzionale alla differenza tra la lunghezza massima della specie L^* e la lunghezza raggiunta.

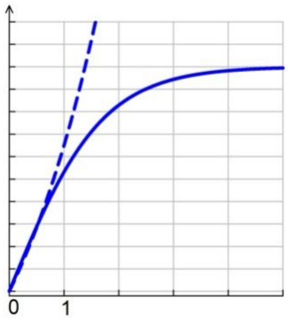
Costruzione del modello

$$\begin{cases} \ell_0 & start \\ \ell_n - \ell_{n-1} = k\left(L^* - \ell_{n-1}\right) \end{cases} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$



La crisi del modello

Esperimento di Gause	Gause pose 5 protozoi in una provetta contenente del brodo di colturae osservò per 6 giorni di seguito la loro crescita. Durante i primi giorni il tasso di crescita era enorme (231% circa), in seguito la crescita rallentò progressivamente fin quando la popolazione si stabilizzò a 375 individui.



Il biologo ipotizzò **la saturazione dell'ambiente rallentava la velocità di crescita**.

Modello non lineare di Verhulst

Nel 1838 il biologo belga Pierre F. Verhulst introdusse una variante al modello di crescita esponenziale.
Egli propose di sostituire il fattore di crescita costante con un **fattore di crescita variabile** in funzione del numero di individui della popolazione, assumendo una *legge di variabilitàlineare*

Fattore di crescita

$$a(x) = -mx + q \qquad \text{con} \quad m > 0.$$

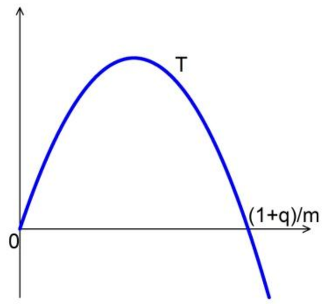
Modello

$$\begin{cases} x_0 & start \\ x_{n+1} = -m\,x_n^2 + (1+q)\,x_n \end{cases}$$

Trasformazione non lineare

Il modello è pertanto governato dalla **trasformazione non lineare**

$$T(x) = -mx^2 + (1+q)x$$



non ammette formula chiusa

Confronto fra modello lineare e nonlineare		
	Modello Malthus LINEARE	Modello Verhulst NON-LINEARE
fattore di crescita	costante a	lineare $a(x) = -mx + q$
processo	$\begin{cases} x_0 & start \\ x_{n+1} = (1+a)x_n \end{cases}$	$\begin{cases} x_0 & start \\ x_{n+1} = -k\,x_n^2 + k\,x_n \end{cases}$ $k = (1+q)^2 / m$
trasformazione	$T(x) = (1+a)x$	$T(x) = -k\,x^2 + k\,x$
formula chiusa	$x_{n+1} = (1+a)^n x_n$	No
evoluzione	esponenziale	molto variabile

Evoluzione delle iterate

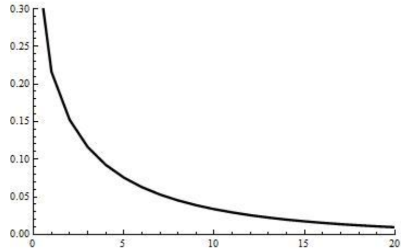
$0 < k \leq 1$

estinzione

Decrescita esponenziale

$$\inf_n x_n = 0$$

ossia **la popolazione si estingue**



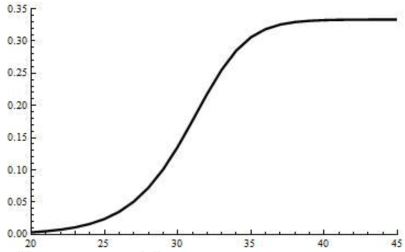
$1 < k \leq 2$

equilibrio asintotico

Crescita logistica

le iterate sono crescenti, evolvono seguendo una **curva logistica** e

$$\sup_n x_n = 1 - \frac{1}{k}$$

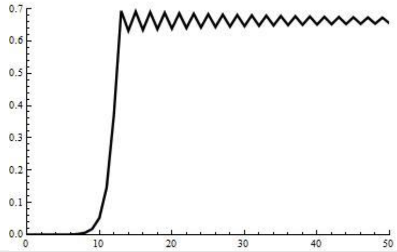


$2 < k \leq 3$

Oscillazioni intorno alpunto di equilibrio

le iterate oscillano intorno al punto

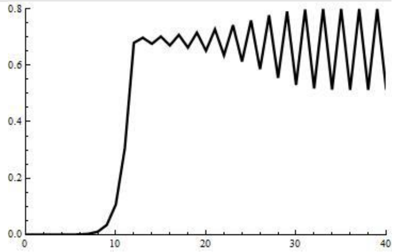
$$\tilde{x} = 1 - \frac{1}{k}$$



$3 < k < 3,57$

oscillazioni periodiche

le iterate presentano oscillazioni periodiche

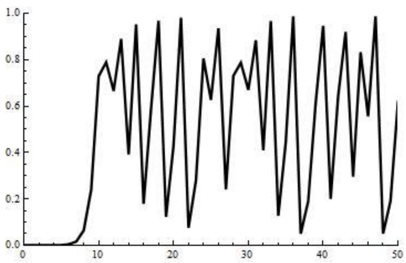


$3.57 < k \leq 4$

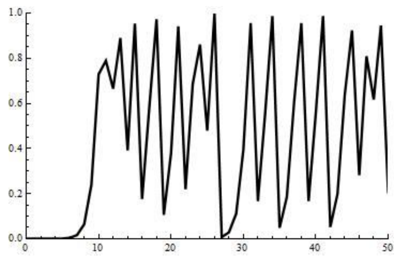
caos

Elevata sensibilità rispetto al dato iniziale
La figure seguente mostrano l'evoluzione a partire da due dati iniziali differenti

$x_0 = 10^{-6}$ (Fot. 1) e $x_0 = 10^{-6} + 10^{-10}$ (Fot. 2).

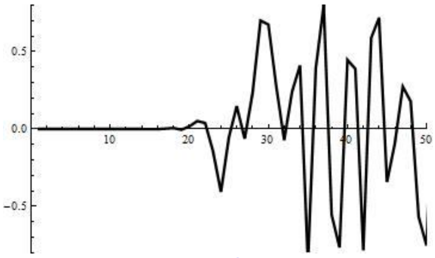


Fot. 1



Fot. 2

differenza o sfasamento delle orbite



Fot.3

Quest'ultimo esempio illustra il così detto **effetto farfalla**.

3. Dai modello discreto al MODELLO CONTINUO

Problematiche aperte: studio della evoluzione asintotica

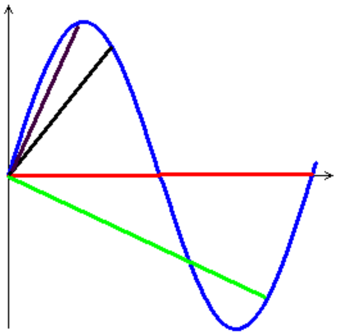
tasso = variazione relativa

$$\Delta x = x_{n+1} - x_n = \frac{x_{n+1} - x_n}{(n+1)-1}$$

tasso di variazione medio

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

tasso medio - tasso istantaneo



Fisica

$$velocità = \frac{\Delta\, spazio}{\Delta\, tempo} \qquad potenza = \frac{\Delta\, lavoro}{\Delta\, tempo} \qquad intensità\ di\ corrente = \frac{\Delta\, carica}{\Delta\, tempo}$$

$$densità\ lineare = \frac{\Delta\, massa\ di\ una\ corda}{\Delta\, lunghezza}$$

tasso propagazione del calore, gradiente di temperatura, velocità di decadimento di una sostanza radioattiva.

Chimica

$$velocità\ di\ reazione = \frac{\Delta\, concentrazione}{\Delta\, tempo}$$

Economia

$$costo\ marginale = \frac{\Delta\, costi\ di\ produzione}{\Delta\, produzione}$$

Demografia e biologia

$$dinamica\ di\ una\ popolazione = \frac{\Delta\, popolazione}{\Delta\, tempo}$$

Ingegneria

Un ingegnere idraulico determina la portata

$$portata = \frac{\Delta\, volume\ di\ acqua}{\Delta\, tempo}$$

che attraversa una condotta.

Un urbanista è interessato alla *variazione della densità di popolazione* in una città, man mano che ci si allontana dal centro.

Geologia

Un geologo è interessato alla *velocità alla quale un blocco di roccia fusa si raffredda* mediante dispersione del calore nelle rocce circostanti.

Meteorologia

Un meteorologo vuole conoscere il tasso di variazione della pressione atmosferica rispetto all'altitudine.

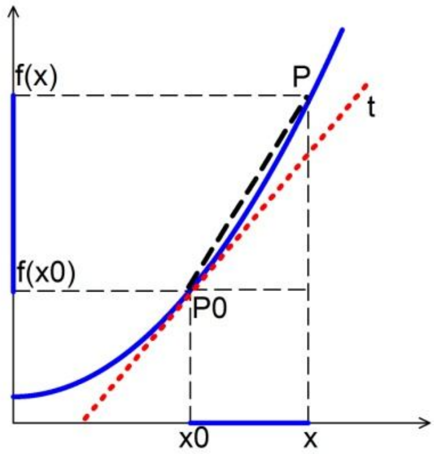
Pedagogia

Il pedagogo utilizza la così detta *curva di apprendimento*, che descrive la quantità di informazioni acquisite da un allievo in funzione del tempo impiegato, per stimare la *velocità di apprendimento*.

SOLUZIONE ALLA PROBLEMATICA: limite - derivata

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$



limite è lineare (proprietà, infinitesimi e infiniti, ...)

derivata è un operatore lineare (proprietà: derivata prodotto, derivata funzione composta, ...)

Rivisitazione di due modelli notevoli

Modello di Malthus in dinamica delle popolazioni

L'economista inglese Thomas Malthus nel 1798 ipotizza che **il tasso di crescita** di una *popolazione isolata* **sia direttamente proporzionale al numero di individui**

$$\begin{cases} P(0) = P_0 \\ P'(t) = k\,P(t) \quad t \in [0,a] \end{cases}$$

Legge di Newton di reffreddamento/riscaldamento

Il caffè versato in una tazzina si raffredda secondo la legge di Newton:
la **variazione di temperatura** (**gradiente termico**).è proporzionale alla differenza di temperatura tra il caffè e l'ambiente (**salto termico**).

$$\begin{cases} T(0) = T_0 \\ T'(t) = k[T(t) - T_a] \quad t \in [0,a] \end{cases}$$

Modello non lineare di Verhulst

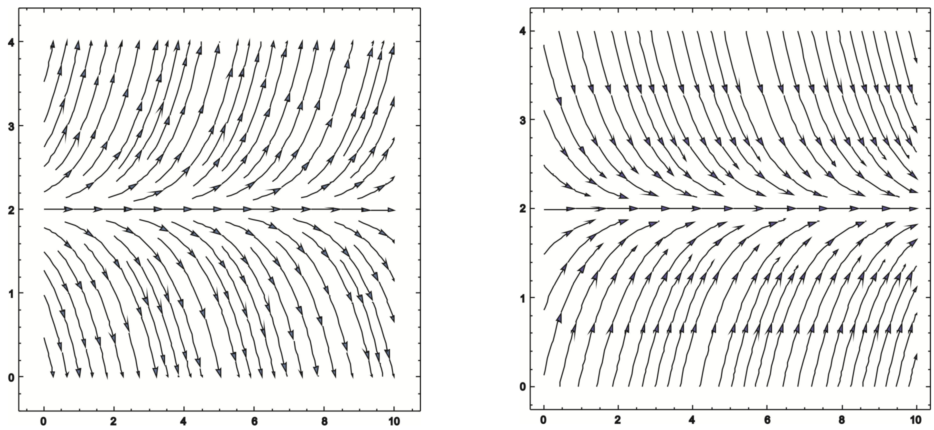
con un **fattore di crescita variabile**

$$\begin{cases} P(0) = P_0 \\ P'(t) = -k\,P^2(t) + k\,P(t) \quad t \in [0,a] \end{cases}$$

Modello generale: equazione differenziale (problema da Cauchy)

Come si affronta la soluzione di un'equazione differenziale?

Campo di direzioni - modello Malthus - Newton



k>0 k<0

Come abbiamo affrontato la soluzione di un'equazione numerica?

$$f(x) = 0$$

La risoluzione di un'equazione si articola in tre *fasi* principali:

- discussione dell'*esistenza* delle soluzioni
- valutazione dell'*unicit*à della soluzione
- ***calcolo* delle soluzioni** (per via *esatta* e/o mediante algoritmi di *approssimazione*).

Tecnica dell'inversa (inversa parziale) [1]

EQUAZIONE NUMERICA

se la funzione è invertibile $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(0)$

Equazione differenziale

Caso particolare di equazione differenziale

$$x'(t) = f(t)$$

problema di ricostruzione di una funzione dalla sua derivata

se l'operatore derivata D fosse invertibile, risulterebbe

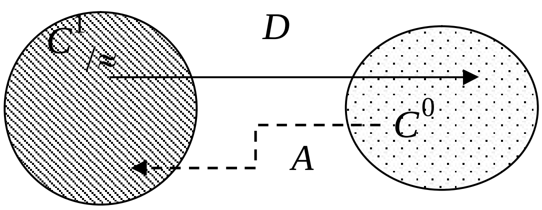
$$D\,x = f \quad \Leftrightarrow \quad x = D^{-1}(D\,x) = D^{-1}(f)$$

SOLUZIONE ALLA PROBLEMATICA: integrale

Operatore inverso

Di conseguenza (adottando la notazione dell'algebra lineare) esiste un operatore antiderivata "inverso" dell'operatore derivata

$$A : C^0 \to C^1{}_{/\approx}$$



Il risultato di rappresentazione dell'operatore antiderivata, fornisce un importante collegamento con il concetto di *integrale*

$$x'(t) = f(t) \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = \int_0^t f(s)\,ds + x(0)$$

$$A(g) = \int_0^t g(s)\,ds$$

antiderivata è un operatore lineare
(proprietà: antiderivata prodotto = integrazione per parti,
antiderivata funzione composta=integrazione per sostituzione, ...)

Caso più generale di equazione differenziale

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ x'(t) = f(t)\,g(x(t)) \quad t \in [0,a] \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = \int_0^t f(s)\,g(x(s))\,ds$$

integrazione per separazione delle variabili

$$\int_0^t \frac{x'(s)}{g\left(x(s)\right)}\, ds = \int_0^t f\left(s\right) ds$$

Uovo alla coque

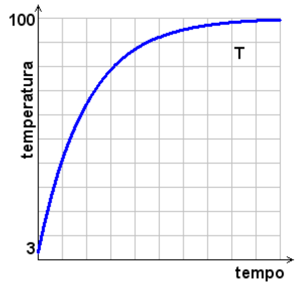
Un uovo, tolto dal frigorifero (temperatura 3 ^{0}C), è immerso in una pentolina con acqua bollente. Come evolve la sua temperature e quindi cottura?
Possiamo far ricorso al modello di Newton

$$\begin{cases} T'(t) = k[T(t) - 100] \\ T(0) = 3 \end{cases} \quad t \geq 0 \quad k < 0$$

La soluzione è la funzione (vedi immagine a lato)

$$T(t) = 100 - 97e^{kt} \quad k < 0$$

.



Lunghezza dei pesci

Secondo gli studi del biologo Ludwig von Bertalanffy il tasso di crescita (lunghezza) di alcune specie di pesci è proporzionale alla differenza tra la lunghezza massima della specie L^* e la lunghezza raggiunta.

Stime (sperimentali) relative al merluzzo del Mare del Nord:

$L^* = 53\,cm$, **lunghezza (media) alla nascita =** $10\,cm$, **costante di proporzionalità =** 0.2

Costruzione del modello

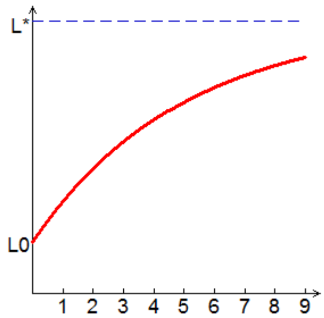
$$\begin{cases} L'(t) = k\left(L^* - L(t)\right) \quad t \geq 0 \\ L(0) = L_0 \end{cases}$$

Applicando la tecnica dell'inversa, otteniamo la soluzione

$$L(t) = L^* - (L^* - L_0)e^{-kt}$$

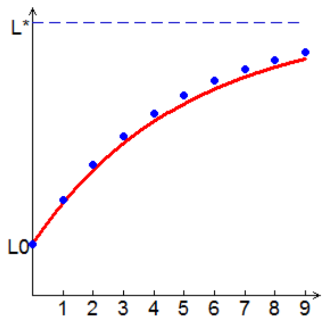
che, nel caso particolare del merluzzo del mare del Nord, diventa (vedi figura a lato)

$$L(t) = 53 - 43e^{-0,2t}.$$



Discussione della soluzione

Nell'immagine a lato confrontiamo la soluzione del modello continuo, appena calcolata, con quella del modello discreto discusso precedentemente.



Curve di apprendimento

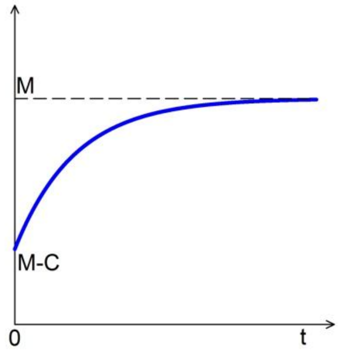
Il seguente modello per descrivere la prestazione $P = P(t)$ di un individuo che acquista una certa abilità in funzione del tempo

$$P'(t) = k(M - P(t))$$

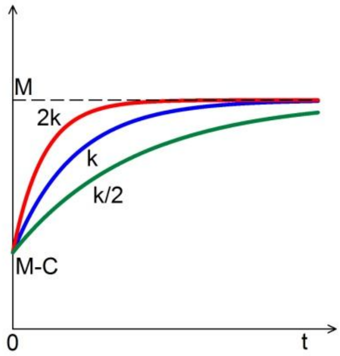
ove k è una costante positiva ed M denota il massimo livello di prestazione di cui il soggetto è capace.Le soluzioni del problema differenziale sono dette *curve di apprendimento.*

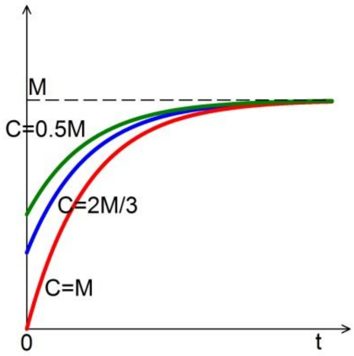
b)

$$\boxed{P(t) = M - Ce^{-kt}}$$



Il grafici seguenti mostrano come variano le soluzioni in funzione dei parametri k e C, rispettivamente.





Crescita cellulare

Un modello per la crescita della superficie occupata da una coltura cellulare assume che la velocità di crescita sia del tipo

$$A'(t) = k\sqrt{A(t)}\left(M - A(t)\right)$$

ove M è l'area finale a crescitacompletata. Infatti la maggior parte delle divisioni cellulari avviene verso la periferia ove il numero delle cellule èproporzionale a $\sqrt{A(t)}$.

Determinare l'andamento della superficie al variare del tempo.

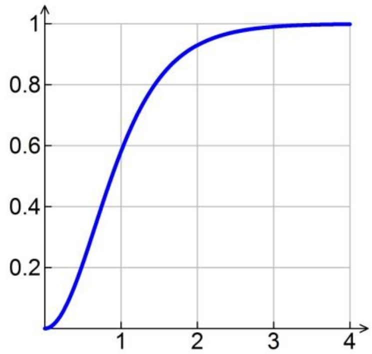
Svolgimento

Risolviamo l'equazione differenziale

$$A'(t) = k\sqrt{A(t)}\left(M - A(t)\right)$$

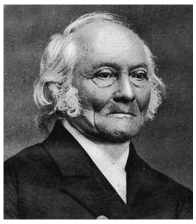
per separazione delle variabili

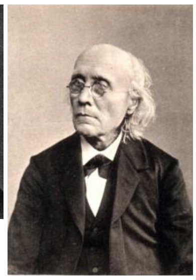
$$A(t) = \left(\frac{e^{kt} - 1}{e^{kt} + 1}\right)^2$$



Equazione di Weber Fisher

L'equazione di Weber-Fechner (pionieri della psicologia sperimentale) descrive la relazione fra l'intensità di uno stimolo s e la percezione p che si ha dello stesso:





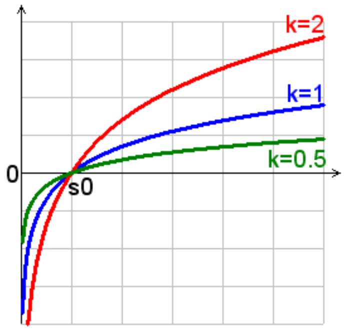
$$\frac{dp}{ds}=\frac{k}{s}\quad k>0\,.$$

Secondo il modello, il tasso di percezione è tanto minore quanto l'intensità di partenza è più elevata.
Ad esempio, l'aggiunta di 1 kg ad un bagaglio si avverte in modo superiore se questo all'origine pesava 5 kg piuttosto che 30 kg.

Svolgimento Per determinare la relazione $p(s)$ risolviamo l'equazione differenziale. Operando per separazione delle variabili

$$p(s)=k\log\frac{s}{s_0}$$

ove $s_0>0$ denota il livello di soglia dello stimolo, cioè lo stimolo corrispondente ad una percezione nulla.



Referenze

[1] P.Brandi - A.Salvadori, *Prima di iniziare. Conoscenze e competenze di base per l'Università*. Aguaplano-Officina del libro, Passignano s.T. (PG), (2011) pgg.316 ISBN 9788890572654

[2] P.Brandi - A.Salvadori, *Nuovi Percorsi di Matematica, Introduzione al Calcolo di Newton secondo Matematica&Realtà*, 2 volumi, Aguaplano-Officina del libro, Passignano s.T. (PG), (2015) pgg.357 ISBN 9788897738718; pgg.295 ISBN 9788897738657

[3] Brandi - A.Salvadori, *MATH Maps. Itinerari per le competenze*, II volume, Quaderni Alice&Bob - PRISTEM Bocconi, 45, Egea (2016) pp.124 ISBN 978-88-238-6199-2 ISSN 1973-6479

[4] P.Brandi - A.Salvadori, *Modelli dinamici elementari*. work in progress

www.matematicaerealta.eu

CONVEGNO DI APERTURA DELLE ATTIVITA' 2018-19

RICCIONE, Hotel Mediterraneo, 19-21 OTTOBRE 2018