Un modello dei numeri iperreali

Riccardo Dossena

Liceo Scientifico "G. Novello" - Codogno (LO)

L'Analisi nella Scuola Secondaria

Padova, 28 settembre 2018

I numeri reali

I numeri reali formano un **campo ordinato completo**

$$\boxed{\mathscr{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)}$$

I numeri reali

Assiomi di campo (primo ordine)

1. Leggi associative
   $\forall x\ \forall y\ \forall z\ [x + (y + z) = (x + y) + z]$
   $\forall x\ \forall y\ \forall z\ [x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z]$
2. Leggi commutative
   $\forall x\ \forall y\ [x + y = y + x] \quad \forall x\ \forall y\ [x \cdot y = y \cdot x]$
3. Legge distributiva
   $\forall x\ \forall y\ \forall z\ [x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z]$
4. Leggi degli elementi neutri
   $\forall x\ [x + 0 = x] \quad \forall x\ [x \cdot 1 = x]$
5. Esistenza dell'opposto e del reciproco
   $\forall x\ \exists y [x + y = 0] \quad \forall x\ [x \neq 0 \rightarrow \exists y (x \cdot y = 1)]$

I numeri reali

Assiomi di campo ordinato (primo ordine)

6. Leggi dell'ordinamento
   $\forall x\ [x \leq x]$
   $\forall x\ \forall y\ [x \leq y\ \wedge\ y \leq x\ \rightarrow\ x = y]$
   $\forall x\ \forall y\ \forall z\ [x \leq y\ \wedge\ y \leq z\ \rightarrow\ x \leq z]$
7. Legge di dicotomia
   $\forall x\ \forall y\ [x \leq y\ \vee\ y \leq x]$
8. Leggi di compatibilità dell'ordinamento
   $\forall x\ \forall y\ \forall z\ [x \leq y\ \rightarrow\ x + z \leq y + z]$
   $\forall x\ \forall y\ \forall z\ [0 \leq z\ \wedge\ x \leq y\ \rightarrow\ x \cdot z \leq y \cdot z]$

Assioma di completezza (secondo ordine)

9. $\forall u \subseteq \mathbb{R}\ [(u \neq \varnothing\ \wedge\ \exists z \forall x (x \in z \rightarrow x \leq z)) \rightarrow$
   $\exists z (\forall x (x \in u \rightarrow x \leq z) \wedge \forall z' (\forall x (x \in u \rightarrow x \leq z')) \rightarrow z \leq z')]$

I numeri reali

Modelli della teoria dei numeri reali, cioè strutture che soddisfano gli assiomi, sono

- **Sezioni di Dedekind.** Un numero reale è una partizione di $\mathbb{Q}$ in una coppia $\langle L, U\rangle$ di sottoinsiemi disgiunti in cui ogni elemento di L è minore di ogni elemento di U e L non ha massimo.

- **Classi di successioni di Cauchy.** Un numero reale è una classe di equivalenza di successioni $\langle r_n\rangle$ di Cauchy di numeri razionali, cioè tali che

$$\lim_{n,m\to\infty} |r_n - r_m| = 0$$

Due successioni di Cauchy $\langle r_n\rangle$ e $\langle s_n\rangle$ sono equivalenti se

$$\lim_{n\to\infty} |r_n - s_n| = 0$$

Costruzione dei numeri iperreali

Sia $\mathscr{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ il campo ordinato (completo) dei numeri reali

Costruzione dei numeri iperreali

Sia $\mathscr{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ il campo ordinato (completo) dei numeri reali

Sia $\hat{\mathbb{R}}$ l'insieme delle successioni reali, i cui elementi sono della forma

$$r = \langle r_1, r_2, r_3, \ldots \rangle = \langle r_i \rangle$$

Costruzione dei numeri iperreali

Sia $\mathscr{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ il campo ordinato (completo) dei numeri reali

Sia $\hat{\mathbb{R}}$ l'insieme delle successioni reali, i cui elementi sono della forma

$$r = \langle r_1, r_2, r_3, \ldots \rangle = \langle r_i \rangle$$

Se $r = \langle r_i \rangle$ e $s = \langle s_i \rangle$ sono due elementi di $\hat{\mathbb{R}}$, si possono definire le operazioni $\oplus$ e $\odot$ nel seguente modo

$$r \oplus s = \langle r_i + s_i \rangle$$
$$r \odot s = \langle r_i \cdot s_i \rangle$$

Costruzione dei numeri iperreali

Sia $\mathscr{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ il campo ordinato (completo) dei numeri reali

Sia $\hat{\mathbb{R}}$ l'insieme delle successioni reali, i cui elementi sono della forma

$$r = \langle r_1, r_2, r_3, \dots \rangle = \langle r_i \rangle$$

Se $r = \langle r_i \rangle$ e $s = \langle s_i \rangle$ sono due elementi di $\hat{\mathbb{R}}$, si possono definire le operazioni $\oplus$ e $\odot$ nel seguente modo

$$r \oplus s = \langle r_i + s_i \rangle$$
$$r \odot s = \langle r_i \cdot s_i \rangle$$

$(\hat{\mathbb{R}}, \oplus, \odot)$ è un anello commutativo con zero $\langle 0, 0, 0, \dots \rangle$ e unità $\langle 1, 1, 1, \dots \rangle$, ma *non* è un campo perché ad esempio

$$\langle 1, 0, 1, 0, 1, \dots \rangle \odot \langle 0, 1, 0, 1, 0, \dots \rangle = \langle 0, 0, 0, \dots \rangle$$

Costruzione dei numeri iperreali

Come fare?

Serve un metodo che permetta di selezionare uno fra $\langle 1, 0, 1, 0, 1, \ldots \rangle$ e $\langle 0, 1, 0, 1, 0, \ldots \rangle$ e identificarlo con zero.

Costruzione dei numeri iperreali

Come fare?

Serve un metodo che permetta di selezionare uno fra $\langle 1, 0, 1, 0, 1, \ldots \rangle$ e $\langle 0, 1, 0, 1, 0, \ldots \rangle$ e identificarlo con zero.

La tecnica che presentiamo è quella della "costruzione di un'ultrapotenza di $\mathbb{R}$", che si basa sulla nozione di ultrafiltro.

Costruzione dei numeri iperreali

Definizione

Un filtro su $\mathbb{N}$ è una collezione non vuota $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ con le seguenti proprietà

1. $\varnothing \notin \mathcal{F}$;
2. *se* $A, B \in \mathcal{F}$, *allora* $A \cap B \in \mathcal{F}$;
3. *se* $A \in \mathcal{F}$ e $A \subseteq B \subseteq \mathbb{N}$, *allora* $B \in \mathcal{F}$.

Costruzione dei numeri iperreali

Definizione

Un filtro su $\mathbb{N}$ è una collezione non vuota $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ con le seguenti proprietà

1. $\varnothing \notin \mathcal{F}$;
2. *se* $A, B \in \mathcal{F}$, *allora* $A \cap B \in \mathcal{F}$;
3. *se* $A \in \mathcal{F}$ e $A \subseteq B \subseteq \mathbb{N}$, *allora* $B \in \mathcal{F}$.

Un filtro $\mathcal{F}$ su $\mathbb{N}$ è un ultrafiltro su $\mathbb{N}$ se, per ogni $A \subseteq \mathbb{N}$, o $A \in \mathcal{F}$ oppure il suo complementare $A' = \mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{F}$ (ma non entrambi per le proprietà 1 e 2).

Costruzione dei numeri iperreali

- La famiglia

$$\mathcal{F}_{\mathbb{N}} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid \mathbb{N} \setminus A \text{ è finito}\}$$

è un filtro chiamato cofinito o di Fréchet.

Costruzione dei numeri iperreali

- La famiglia

$$\mathcal{F}_{\mathbb{N}} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid \mathbb{N} \setminus A \text{ è finito}\}$$

è un filtro chiamato cofinito o di Fréchet.

Un ultrafiltro su $\mathbb{N}$ si dice libero se contiene $\mathcal{F}_{\mathbb{N}}$.

Costruzione dei numeri iperreali

- La famiglia

$$\mathcal{F}_{\mathbb{N}} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid \mathbb{N} \setminus A \text{ è finito}\}$$

è un filtro chiamato cofinito o di Fréchet.

Un ultrafiltro su $\mathbb{N}$ si dice libero se contiene $\mathcal{F}_{\mathbb{N}}$.

Applicando il Lemma di Zorn si può dimostrare il seguente teorema.

> Esiste un ultrafiltro libero su $\mathbb{N}$.

Costruzione dei numeri iperreali

Consideriamo un ultrafiltro libero $\mathcal{U}$ su $\mathbb{N}$.

Definizione

Se $r = \langle r_i \rangle$ e $s = \langle s_i \rangle$ sono elementi di $\hat{\mathbb{R}}$, allora

$$r \equiv s \quad \Leftrightarrow \quad \{i \in \mathbb{N} \mid r_i = s_i\} \in \mathcal{U}$$

In questo caso diciamo che r ed s sono uguali quasi ovunque e scriviamo $\langle r_i \rangle = \langle s_i \rangle$ q.o.

La relazione $\equiv$ è di equivalenza su $\hat{\mathbb{R}}$. ▸ Dimostrazione - Appendice 1

Costruzione dei numeri iperreali

Osserviamo che due successioni possono avere lo stesso limite per $n \longrightarrow \infty$ e tuttavia non essere equivalenti. Ad esempio

$$\left\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\rangle \not\equiv \langle 0, 0, 0, \dots \rangle$$

poiché $\varnothing \notin \mathcal{U}$.

Inoltre si vede che solo una delle due successioni $\langle 1, 0, 1, 0, 1, \dots \rangle$ e $\langle 0, 1, 0, 1, 0, \dots \rangle$ è equivalente a $\langle 0, 0, 0, \dots \rangle$.

Costruzione dei numeri iperreali

La classe di equivalenza contenente la successione $r = \langle r_i \rangle$ si indica con $\mathbf{r}$ oppure con $[r]$.

Denotiamo con $\mathbb{R}^*$ l'insieme delle classi di equivalenza di $\hat{\mathbb{R}}$ indotte da $\equiv$

$$\mathbb{R}^* = \hat{\mathbb{R}}/\equiv$$

che chiamiamo insieme dei numeri iperreali.

Costruzione dei numeri iperreali

Definiamo in $\mathbb{R}^*$ le seguenti operazioni e relazioni. Siano $\mathbf{r} = [\langle r_i \rangle]$ e $\mathbf{s} = [\langle s_i \rangle]$. Allora

- $\mathbf{r} + \mathbf{s} = [\langle r_i + s_i \rangle]$, cioè $[r] + [s] = [r \oplus s]$
- $\mathbf{r} \cdot \mathbf{s} = [\langle r_i \cdot s_i \rangle]$, cioè $[r] \cdot [s] = [r \odot s]$
- $\mathbf{r} < \mathbf{s}$ se e solo se $\{i \in \mathbb{N} \mid r_i < s_i\} \in \mathcal{U}$
- $\mathbf{r} \leq \mathbf{s}$ se e solo se $\mathbf{r} < \mathbf{s}$ o $\mathbf{r} = \mathbf{s}$ (sse $\{i \in \mathbb{N} \mid r_i \leq s_i\} \in \mathcal{U}$)

Si verifica facilmente che queste definizioni sono ben poste.

Costruzione dei numeri iperreali

Definiamo in $\mathbb{R}^*$ le seguenti operazioni e relazioni. Siano $\mathbf{r} = [\langle r_i \rangle]$ e $\mathbf{s} = [\langle s_i \rangle]$. Allora

- $\mathbf{r} + \mathbf{s} = [\langle r_i + s_i \rangle]$, cioè $[r] + [s] = [r \oplus s]$
- $\mathbf{r} \cdot \mathbf{s} = [\langle r_i \cdot s_i \rangle]$, cioè $[r] \cdot [s] = [r \odot s]$
- $\mathbf{r} < \mathbf{s}$ se e solo se $\{i \in \mathbb{N} \mid r_i < s_i\} \in \mathcal{U}$
- $\mathbf{r} \leq \mathbf{s}$ se e solo se $\mathbf{r} < \mathbf{s}$ o $\mathbf{r} = \mathbf{s}$ (sse $\{i \in \mathbb{N} \mid r_i \leq s_i\} \in \mathcal{U}$)

Si verifica facilmente che queste definizioni sono ben poste.

Teorema

La struttura $\mathscr{R}^* = (\mathbb{R}^*, +, \cdot, \leq)$ è un campo ordinato.

▸ Dimostrazione di alcune proprietà - Appendice 2

Definizioni e proprietà di $\mathbb{R}^*$

Definizione

Un numero $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^*$ *è positivo se* $\mathbf{r} > \mathbf{0}$, *negativo se* $\mathbf{r} < \mathbf{0}$;

il valore assoluto di $\mathbf{r}$ *si definisce come*

$$|\mathbf{r}| = \begin{cases} \mathbf{r} & \textit{se } \mathbf{r} > \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \textit{se } \mathbf{r} = \mathbf{0} \\ -\mathbf{r} & \textit{se } \mathbf{r} < \mathbf{0} \end{cases}$$

Si può dimostrare facilmente che

- se $\mathbf{r} = [\langle r_i \rangle]$, allora $|\mathbf{r}| = [\langle |r_i| \rangle]$
- $|\mathbf{r} + \mathbf{s}| \leq |\mathbf{r}| + |\mathbf{s}|$
- $|\mathbf{rs}| = |\mathbf{r}||\mathbf{s}|$

Definizioni e proprietà di $\mathbb{R}^*$

Consideriamo la funzione

$$* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^* \qquad *(r) = [\langle r, r, r, \ldots \rangle]$$

e indichiamo $*(r)$ con r^*

Esempio.

$$5^* = [\langle 5, 5, 5, \ldots \rangle] = [\langle 1, 5, 5, 5, \ldots \rangle] = [\langle 5, \pi, 5, 5, \ldots \rangle] = \ldots$$

Definizioni e proprietà di $\mathbb{R}^*$

Consideriamo la funzione

$$*: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^* \qquad *(r) = [\langle r, r, r, \ldots \rangle]$$

e indichiamo $*(r)$ con r^*

Teorema

$*$ *induce un isomorfismo di campi ordinati fra* $\mathbb{R}$ *e* $*(\mathbb{R})$

Definizioni e proprietà di $\mathbb{R}^*$

Consideriamo la funzione

$$* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^* \qquad *(r) = [\langle r, r, r, \ldots \rangle]$$

e indichiamo $*(r)$ con r^*

Teorema

$*$ *induce un isomorfismo di campi ordinati fra* $\mathbb{R}$ *e* $*(\mathbb{R})$

Dimostrazione. È facile vedere che $*$ è iniettiva e preserva le proprietà di campo ordinato. Ad esempio

$$[\langle r, r, \ldots \rangle] + [\langle s, s, \ldots \rangle] = [\langle r+s, r+s, \ldots \rangle]$$

stabilisce che $(r+s)^* = r^* + s^*$. $\square$

Definizioni e proprietà di $\mathbb{R}^*$

Consideriamo la funzione

$$*: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^* \qquad *(r) = [\langle r, r, r, \ldots \rangle]$$

e indichiamo $*(r)$ con r^*

Teorema

$*$ *induce un isomorfismo di campi ordinati fra* $\mathbb{R}$ *e* $*(\mathbb{R})$

Dunque $\mathbb{R}^*$ contiene un sottocampo ordinato isomorfo a $\mathbb{R}$, che chiamiamo insieme dei numeri standard

il suo complementare è l'insieme dei numeri non standard

Definizioni e proprietà di $\mathbb{R}^*$

$\mathbb{R}^*$ è un'estensione propria di $\mathbb{R}$, infatti

- il numero $\omega = [\langle 1, 2, 3, \ldots \rangle]$ non può essere uguale a nessun numero standard $r^* = [\langle r, r, r, \ldots \rangle]$ poiché l'insieme $\{i \in \mathbb{N} \mid i = r\} \notin \mathcal{U}$, dato che contiene al massimo un numero naturale;

Definizioni e proprietà di $\mathbb{R}^*$

$\mathbb{R}^*$ è un'estensione propria di $\mathbb{R}$, infatti

- il numero $\omega = [\langle 1, 2, 3, \ldots \rangle]$ non può essere uguale a nessun numero standard $r^* = [\langle r, r, r, \ldots \rangle]$ poiché l'insieme $\{i \in \mathbb{N} \mid i = r\} \notin \mathcal{U}$, dato che contiene al massimo un numero naturale;
- il numero $\omega^{-1} = [\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \rangle]$ non può essere uguale a nessun numero standard $r^* = [\langle r, r, r, \ldots \rangle]$ poiché l'insieme $\{i \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{i} = r\} \notin \mathcal{U}$, per lo stesso motivo.

Definizioni e proprietà di $\mathbb{R}^*$

Convenzioni notazionali

- Identifichiamo $*(\mathbb{R})$ con $\mathbb{R}$ e conveniamo di utilizzare sempre la notazione $\mathbb{R}$;
- i numeri r^* verranno indicati semplicemente con r (ad es. useremo 5 al posto di 5^* per indicare $[\langle 5, 5, 5, \ldots \rangle]$);
- sia i numeri di $\mathbb{R}^*$ che quelli di $\mathbb{R}$ verranno indicati con lettere minuscole.

Infiniti e infinitesimi

Sia $s \in \mathbb{R}^*$. Allora:

- s è infinito se $|s| > n$ per tutti i numeri naturali standard n;
- s è finito se $|s| < n$ per qualche numero naturale standard n;
- s è infinitesimo se $|s| < \dfrac{1}{n}$ per tutti i numeri naturali standard n.

Infiniti e infinitesimi - Esempi

- Il numero $\omega^{-1} = \left[\left\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\rangle\right]$ è infinitesimo, poiché $\omega^{-1} < 1/n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Infiniti e infinitesimi - Esempi

- Il numero $\omega^{-1} = \left[\left\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\rangle\right]$ è infinitesimo, poiché $\omega^{-1} < 1/n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

  Infatti, fissato $n \in \mathbb{N}$, $\{i \in \mathbb{N} \mid \omega_i^{-1} < 1/n\} \in \mathcal{U}$ perché è il complementare di un insieme finito.

Infiniti e infinitesimi - Esempi

- Il numero $\omega^{-1} = \left[\left\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \right\rangle\right]$ è infinitesimo, poiché $\omega^{-1} < 1/n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

  Infatti, fissato $n \in \mathbb{N}$, $\{i \in \mathbb{N} \mid \omega_i^{-1} < 1/n\} \in \mathcal{U}$ perché è il complementare di un insieme finito.

- Il suo inverso $\omega = [\langle 1, 2, 3, \ldots \rangle]$ è infinito, poiché $n < \omega$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Infiniti e infinitesimi - Esempi

- Il numero $\omega^{-1} = \left[\left\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \right\rangle\right]$ è infinitesimo, poiché $\omega^{-1} < 1/n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

  Infatti, fissato $n \in \mathbb{N}$, $\{i \in \mathbb{N} \mid \omega_i^{-1} < 1/n\} \in \mathcal{U}$ perché è il complementare di un insieme finito.

- Il suo inverso $\omega = [\langle 1, 2, 3, \ldots \rangle]$ è infinito, poiché $n < \omega$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

  Infatti, fissato $n \in \mathbb{N}$, $\{i \in \mathbb{N} \mid n < \omega_i\} \in \mathcal{U}$ perché è il complementare di un insieme finito.

Infiniti e infinitesimi - Esempi

- Il numero $\omega^{-1} = \left[\left\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\rangle\right]$ è infinitesimo, poiché $\omega^{-1} < 1/n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

  Infatti, fissato $n \in \mathbb{N}$, $\{i \in \mathbb{N} \mid \omega_i^{-1} < 1/n\} \in \mathcal{U}$ perché è il complementare di un insieme finito.

- Il suo inverso $\omega = [\langle 1, 2, 3, \dots \rangle]$ è infinito, poiché $n < \omega$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

  Infatti, fissato $n \in \mathbb{N}$, $\{i \in \mathbb{N} \mid n < \omega_i\} \in \mathcal{U}$ perché è il complementare di un insieme finito.

  Esistono infiniti numeri maggiori di ω: si considerino ad esempio i numeri $[\langle 2, 3, 4, \dots \rangle]$, $[\langle 3, 4, 5, \dots \rangle]$, ecc.

Infiniti e infinitesimi - Esempi

- Il numero $\omega^{-1} = \left[\left\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\rangle\right]$ è infinitesimo, poiché $\omega^{-1} < 1/n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

  Infatti, fissato $n \in \mathbb{N}$, $\{i \in \mathbb{N} \mid \omega_i^{-1} < 1/n\} \in \mathcal{U}$ perché è il complementare di un insieme finito.

- Il suo inverso $\omega = [\langle 1, 2, 3, \dots \rangle]$ è infinito, poiché $n < \omega$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

  Infatti, fissato $n \in \mathbb{N}$, $\{i \in \mathbb{N} \mid n < \omega_i\} \in \mathcal{U}$ perché è il complementare di un insieme finito.

  Esistono infiniti numeri maggiori di ω: si considerino ad esempio i numeri $[\langle 2, 3, 4, \dots \rangle]$, $[\langle 3, 4, 5, \dots \rangle]$, ecc.

- 0 è infinitesimo. Esso è tuttavia l'unico numero reale infinitesimo.

Infiniti e infinitesimi

Si può dimostrare facilmente che, data una successione $\langle r_n \rangle$,

- se $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$, allora $[\langle r_n \rangle]$ è infinitesimo;
- se $\lim_{n\to\infty} r_n = \pm\infty$, allora $[\langle r_n \rangle]$ è infinito (positivo o negativo).

Infiniti e infinitesimi

Teorema

1. *Somme, differenze e prodotti di infinitesimi sono infinitesimi;*
2. *il prodotto di un infinitesimo e di un numero finito è infinitesimo.*

Dimostrazione - Appendice 3

La relazione $\approx$ e le monadi

Definizione

Due numeri iperreali b e c sono infinitamente vicini ($b \approx c$) se la loro differenza $c - b$ è un infinitesimo.

La relazione $\approx$ è di equivalenza su $\mathbb{R}^*$.

La relazione $\approx$ e le monadi

Definizione

Due numeri iperreali b e c sono infinitamente vicini ($b \approx c$) se la loro differenza $c - b$ è un infinitesimo.

La relazione $\approx$ è di equivalenza su $\mathbb{R}^*$.

- *Riflessività* ($a \approx a$). Infatti $a - a = 0$ (infinitesimo).
- *Simmetria* ($a \approx b$ implica $b \approx a$). Infatti, se $b - a = \varepsilon$ è infinitesimo, allora $a - b = -\varepsilon$ è pure infinitesimo.
- *Transitività* ($a \approx b$ e $b \approx c$ implica $a \approx c$). Infatti se $b - a = \varepsilon$ è infinitesimo e $c - b = \varepsilon'$ è infinitesimo, allora $c = b + \varepsilon'$ e $a = b - \varepsilon$. Dunque

$$c - a = b + \varepsilon' - b + \varepsilon = \varepsilon' + \varepsilon$$

infinitesimo perché somma di due infinitesimi.

La relazione $\approx$ e le monadi

Si chiama monade di $x \in \mathbb{R}^*$ l'insieme $m(x)$ dei numeri infinitamente vicini a x

$$m(x) = \{y \in \mathbb{R}^* \mid x \approx y\}$$

La relazione $\approx$ e le monadi

Si chiama monade di $x \in \mathbb{R}^*$ l'insieme $m(x)$ dei numeri infinitamente vicini a x

$$m(x) = \{y \in \mathbb{R}^* \mid x \approx y\}$$

- Due monadi $m(x)$ e $m(y)$ coincidono (se $x \approx y$) oppure sono disgiunte;

La relazione $\approx$ e le monadi

Si chiama monade di $x \in \mathbb{R}^*$ l'insieme $m(x)$ dei numeri infinitamente vicini a x

$$m(x) = \{y \in \mathbb{R}^* \mid x \approx y\}$$

- Due monadi $m(x)$ e $m(y)$ coincidono (se $x \approx y$) oppure sono disgiunte;
- $m(0)$ è l'insieme degli infinitesimi;

La relazione $\approx$ e le monadi

Si chiama monade di $x \in \mathbb{R}^*$ l'insieme $m(x)$ dei numeri infinitamente vicini a x

$$m(x) = \{y \in \mathbb{R}^* \mid x \approx y\}$$

- Due monadi $m(x)$ e $m(y)$ coincidono (se $x \approx y$) oppure sono disgiunte;
- $m(0)$ è l'insieme degli infinitesimi;
- per ogni $x \in \mathbb{R}^*$ si ha

$$m(x) = \{y \in \mathbb{R}^* \mid y = x + \varepsilon, \text{con } \varepsilon \text{ infinitesimo}\}$$

Teorema (della parte standard)

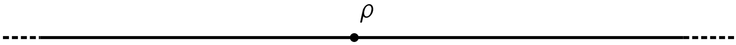
Ogni numero iperreale finito è infinitamente vicino ad uno e un solo numero reale.

Teorema (della parte standard)

Ogni numero iperreale finito è infinitamente vicino ad uno e un solo numero reale.

Dimostrazione. Sia ρ un numero iperreale finito.

Esistenza

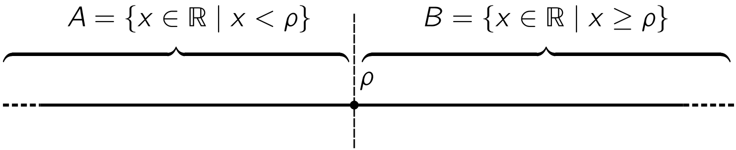


Teorema (della parte standard)

Ogni numero iperreale finito è infinitamente vicino ad uno e un solo numero reale.

Dimostrazione. Sia ρ un numero iperreale finito.

Esistenza



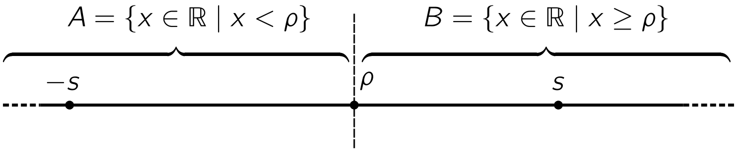
Consideriamo le sezioni A e B

Teorema (della parte standard)

Ogni numero iperreale finito è infinitamente vicino ad uno e un solo numero reale.

Dimostrazione. Sia ρ un numero iperreale finito.

Esistenza



Consideriamo le sezioni A e B

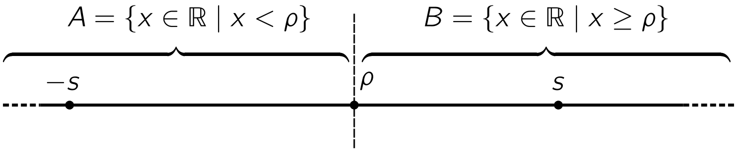
ρ finito $\quad \Rightarrow \quad -s < \rho < s$

Teorema (della parte standard)

Ogni numero iperreale finito è infinitamente vicino ad uno e un solo numero reale.

Dimostrazione. Sia ρ un numero iperreale finito.

Esistenza



Consideriamo le sezioni A e B

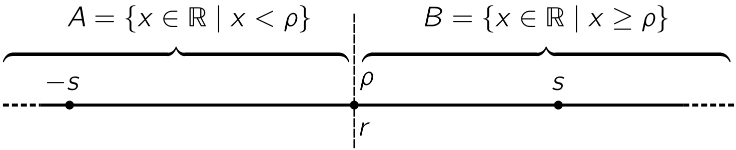
ρ finito $\quad \Rightarrow \quad -s < \rho < s \quad \Rightarrow \quad A \neq \varnothing$ e ha un maggiorante

Teorema (della parte standard)

Ogni numero iperreale finito è infinitamente vicino ad uno e un solo numero reale.

Dimostrazione. Sia ρ un numero iperreale finito.

Esistenza



Consideriamo le sezioni A e B

ρ finito $\quad\Rightarrow\quad -s < \rho < s \quad\Rightarrow\quad A \neq \varnothing$ e ha un maggiorante

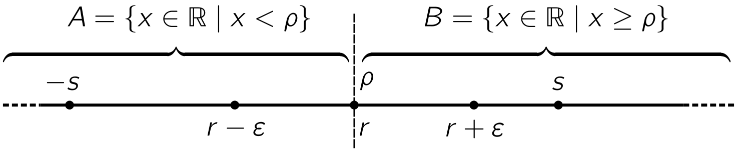
sia $r = \sup(A)$, che esiste per la completezza di $\mathbb{R}$

Teorema (della parte standard)

Ogni numero iperreale finito è infinitamente vicino ad uno e un solo numero reale.

Dimostrazione. Sia ρ un numero iperreale finito.

Esistenza



Consideriamo le sezioni A e B

ρ finito $\quad \Rightarrow \quad -s < \rho < s \quad \Rightarrow \quad A \neq \varnothing$ e ha un maggiorante

sia $r = \sup(A)$, che esiste per la completezza di $\mathbb{R}$

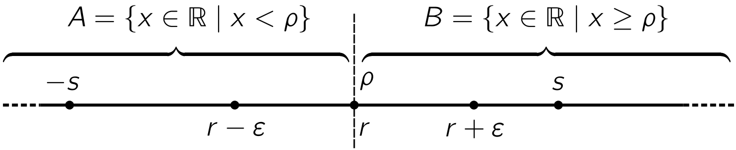
per ogni $\varepsilon > 0$ si ha $r - \varepsilon \in A$ e $r + \varepsilon \in B$

Teorema (della parte standard)

Ogni numero iperreale finito è infinitamente vicino ad uno e un solo numero reale.

Dimostrazione. Sia ρ un numero iperreale finito.

Esistenza



Consideriamo le sezioni A e B

ρ finito $\quad\Rightarrow\quad -s < \rho < s \quad\Rightarrow\quad A \neq \varnothing$ e ha un maggiorante

sia $r = \sup(A)$, che esiste per la completezza di $\mathbb{R}$

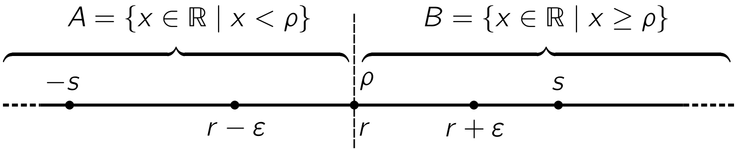
per ogni $\varepsilon > 0$ si ha $r - \varepsilon \in A$ e $r + \varepsilon \in B \Rightarrow r - \varepsilon < \rho \leq r + \varepsilon$

Teorema (della parte standard)

Ogni numero iperreale finito è infinitamente vicino ad uno e un solo numero reale.

Dimostrazione. Sia ρ un numero iperreale finito.

Esistenza



Consideriamo le sezioni A e B

ρ finito $\quad\Rightarrow\quad -s < \rho < s \quad\Rightarrow\quad A \neq \varnothing$ e ha un maggiorante

sia $r = \sup(A)$, che esiste per la completezza di $\mathbb{R}$

per ogni $\varepsilon > 0$ si ha $r - \varepsilon \in A$ e $r + \varepsilon \in B \Rightarrow r - \varepsilon < \rho \leq r + \varepsilon$

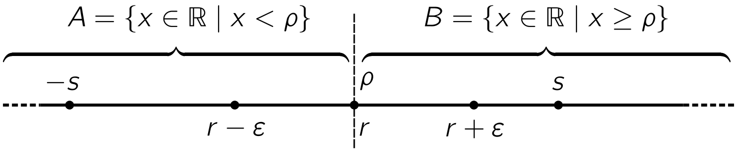
dunque $|r - \rho| \leq \varepsilon$, cioè $r - \rho$ è infinitesimo $\Rightarrow r \approx \rho$.

Teorema (della parte standard)

Ogni numero iperreale finito è infinitamente vicino ad uno e un solo numero reale.

Dimostrazione. Sia ρ un numero iperreale finito.

Unicità



Siano $b, c \in \mathbb{R}$. Dobbiamo dimostrare che se $\rho \approx b$ e $\rho \approx c$, allora $b = c$. Per la transitività $b \approx c$, ma b e c sono numeri reali e l'unico infinitesimo di cui possono differire è 0. $\square$

Sia b un numero iperreale finito. L'unico numero reale a cui b è infinitamente vicino si chiama parte standard di b e viene denotata con $\mathrm{st}(b)$.

Sia b un numero iperreale finito. L'unico numero reale a cui b è infinitamente vicino si chiama parte standard di b e viene denotata con $\mathrm{st}(b)$.

Esempi. Sia ε un infinitesimo:

Sia b un numero iperreale finito. L'unico numero reale a cui b è infinitamente vicino si chiama parte standard di b e viene denotata con $\mathrm{st}(b)$.

Esempi. Sia ε un infinitesimo:

- $3+\varepsilon$ è infinitamente vicino a 3 perché $(3+\varepsilon)-3=\varepsilon$ è infinitesimo:
$$\mathrm{st}(3+\varepsilon)=3$$

Sia b un numero iperreale finito. L'unico numero reale a cui b è infinitamente vicino si chiama parte standard di b e viene denotata con $\mathrm{st}(b)$.

Esempi. Sia ε un infinitesimo:

- $3+\varepsilon$ è infinitamente vicino a 3 perché $(3+\varepsilon)-3=\varepsilon$ è infinitesimo:
$$\mathrm{st}(3+\varepsilon)=3$$
- $7+\varepsilon$ è infinitamente vicino a 7, ma anche a $7+2\varepsilon$ e a $7+\varepsilon^2$. Sia $7+\varepsilon$ che $7+2\varepsilon$ che $7+\varepsilon^2$ sono infinitamente vicini a 7 e a nessun altro numero reale:
$$\mathrm{st}(7+\varepsilon)=\mathrm{st}(7+2\varepsilon)=\mathrm{st}(7+\varepsilon^2)=7$$

Sia b un numero iperreale finito. L'unico numero reale a cui b è infinitamente vicino si chiama parte standard di b e viene denotata con $\mathrm{st}(b)$.

Esempi. Sia ε un infinitesimo:

- $3+\varepsilon$ è infinitamente vicino a 3 perché $(3+\varepsilon)-3=\varepsilon$ è infinitesimo:

$$\mathrm{st}(3+\varepsilon)=3$$

- $7+\varepsilon$ è infinitamente vicino a 7, ma anche a $7+2\varepsilon$ e a $7+\varepsilon^2$. Sia $7+\varepsilon$ che $7+2\varepsilon$ che $7+\varepsilon^2$ sono infinitamente vicini a 7 e a nessun altro numero reale:

$$\mathrm{st}(7+\varepsilon)=\mathrm{st}(7+2\varepsilon)=\mathrm{st}(7+\varepsilon^2)=7$$

- banalmente $2\approx 2$ dato che $2-2=0$ è infinitesimo; $\mathrm{st}(2)=2$

Sia b un numero iperreale finito. L'unico numero reale a cui b è infinitamente vicino si chiama parte standard di b e viene denotata con $\mathrm{st}(b)$.

Esempi. Sia ε un infinitesimo:

- $3+\varepsilon$ è infinitamente vicino a 3 perché $(3+\varepsilon)-3=\varepsilon$ è infinitesimo:

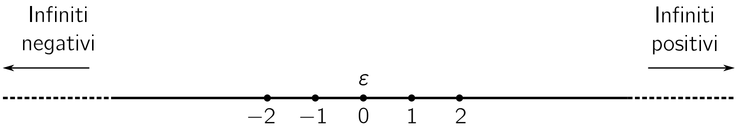
$$\mathrm{st}(3+\varepsilon)=3$$

- $7+\varepsilon$ è infinitamente vicino a 7, ma anche a $7+2\varepsilon$ e a $7+\varepsilon^2$. Sia $7+\varepsilon$ che $7+2\varepsilon$ che $7+\varepsilon^2$ sono infinitamente vicini a 7 e a nessun altro numero reale:

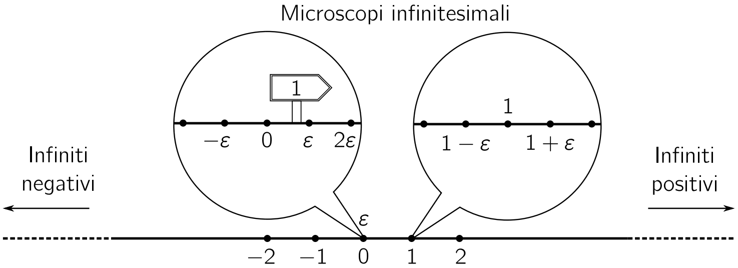
$$\mathrm{st}(7+\varepsilon)=\mathrm{st}(7+2\varepsilon)=\mathrm{st}(7+\varepsilon^2)=7$$

- banalmente $2\approx 2$ dato che $2-2=0$ è infinitesimo; $\mathrm{st}(2)=2$
- ogni monade di numeri finiti contiene uno e un solo numero reale; ogni numero iperreale finito si può scrivere nella forma $x+\varepsilon$, con $x\in\mathbb{R}$ e ε infinitesimo.

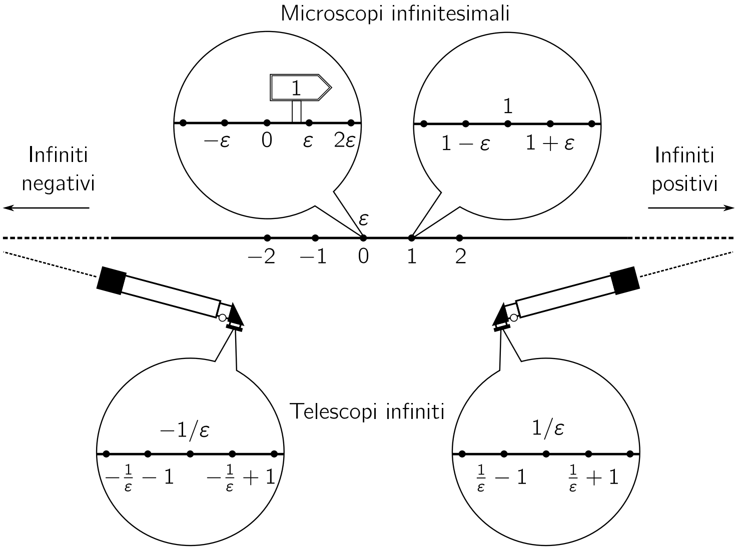
La retta iperreale



La retta iperreale



La retta iperreale



Riferimenti bibliografici I

[1] M. Di Nasso. I numeri infinitesimi e l'analisi nonstandard. *Archimede*, (1):13–22, 2003. http://people.dm.unipi.it/dinasso/papers.html.

[2] M. Di Nasso. Un'introduzione all'analisi con infinitesimi. In *Analisi nonstandard per le scuole superiori – V giornata di studio (Atti del convegno, Verona, 10 ottobre 2015)*. Matematicamente.it, 2016. http://people.dm.unipi.it/dinasso/papers.html.

[3] R. Goldblatt. *Lectures on the Hyperreals: An Introduction to Nonstandard Analysis*. Springer-Verlag, New York, 1998.

[4] G. Goldoni. *Il professor Apotema insegna... i numeri iperreali*. Ilmiolibro.it, 2011. https://planetariodimodena.academia.edu/GiorgioGoldoni.

Riferimenti bibliografici II

[5] G. Goldoni. *Il professor Apotema insegna... il calcolo delle differenze e il calcolo differenziale*. Ilmiolibro.it, 2011. https://planetariodimodena.academia.edu/GiorgioGoldoni.

[6] G. Goldoni. *Il professor Apotema insegna... il calcolo delle somme e il calcolo integrale*. Ilmiolibro.it, 2012. https://planetariodimodena.academia.edu/GiorgioGoldoni.

[7] A. E. Hurd and P. A. Loeb. *An Introduction to Nonstandard Real Analysis*. Academic Press, 1985.

[8] H. J. Keisler. *Elementary Calculus*. Prindle, Weber and Schmidt, Boston, 1976. (Tr. it *Elementi di analisi matematica*, Piccin, 1982). https://www.math.wisc.edu/~keisler/.

Riferimenti bibliografici III

[9] H. J. Keisler. *Foundations of Infinitesimal Calculus*. Prindle, Weber and Schmidt, Boston, 1976. https://www.math.wisc.edu/~keisler/.

[10] A. Robinson. *Non-Standard Analysis*. North Holland, Amsterdam, 1966. (Tr. it *Analisi non standard*, Aracne, 2013).

[11] A. Robinson. *Introduzione alla teoria dei modelli e alla metamatematica dell'algebra*. Boringhieri, 1974.

Appendice 1

La relazione $\equiv$ è di equivalenza su $\hat{\mathbb{R}}$.

Dimostrazione.

- *Riflessività*. $r \equiv r$ poiché $\{i \in \mathbb{N} \mid r_i = r_i\} = \mathbb{N} \in \mathcal{U}$
- *Simmetria*. Discende dalla simmetria di $=$ su $\mathbb{R}$
- *Transitività*. Se $r \equiv s$ e $s \equiv t$ vuol dire che

$$\{i \in \mathbb{N} \mid r_i = s_i\} \in \mathcal{U} \quad \text{e} \quad \{i \in \mathbb{N} \mid s_i = t_i\} \in \mathcal{U}$$

e siccome

$$\{i \in \mathbb{N} \mid r_i = s_i\} \cap \{i \in \mathbb{N} \mid s_i = t_i\} \subseteq \{i \in \mathbb{N} \mid r_i = t_i\}$$

si ha che $\{i \in \mathbb{N} \mid r_i = t_i\} \in \mathcal{U}$, cioè $r \equiv t$.

Indietro

Appendice 2

Teorema

La struttura $\mathscr{R}^* = (\mathbb{R}^*, +, \cdot, \leq)$ *è un campo ordinato.*

Dimostrazione di alcune proprietà. Si verifica che $\mathscr{R}^*$ è un anello con zero $\mathbf{0} = [\langle 0, 0, 0, \ldots \rangle]$ e unità $\mathbf{1} = [\langle 1, 1, 1, \ldots \rangle]$;

l'inverso additivo di $\mathbf{r} = [\langle r_i \rangle]$ è $-\mathbf{r} = [\langle -r_i \rangle]$;

per esempio la proprietà distributiva si dimostra come segue

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{s} + \mathbf{t}) = [r] \cdot ([s] + [t]) = [r] \cdot [s \oplus t] = [r \odot (s \oplus t)] =$$

$$= [(r \odot s) \oplus (r \odot t)] = [r \odot s] + [r \odot t] =$$

$$= [r] \cdot [s] + [r] \cdot [t] = \mathbf{r} \cdot \mathbf{s} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{t}$$

Appendice 2

Teorema

La struttura $\mathscr{R}^* = (\mathbb{R}^*, +, \cdot, \leq)$ *è un campo ordinato.*

Supponiamo che $\mathbf{r} = [\langle r_i \rangle] \neq [\langle 0, 0, 0, \ldots \rangle]$. Allora

$$\{i \in \mathbb{N} \mid r_i = 0\} \notin \mathcal{U}$$

dunque il suo complementare

$$\{i \in \mathbb{N} \mid r_i \neq 0\} \in \mathcal{U}$$

Definiamo $\mathbf{r}^{-1} = [\langle \bar{r}_i \rangle]$ dove $\bar{r}_i = r_i^{-1}$ se $r_i \neq 0$ e $\bar{r}_i = 0$ se $r_i = 0$. A questo punto si ha che

$$\{i \in \mathbb{N} \mid r_i \cdot \bar{r}_i = 1\} = \{i \in \mathbb{N} \mid r_i \neq 0\}$$

cioè $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^{-1} = \mathbf{1}$

Appendice 2

Teorema

La struttura $\mathscr{R}^* = (\mathbb{R}^*, +, \cdot, \leq)$ *è un campo ordinato.*

- per ogni $\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t} \in \mathbb{R}^*$, se $\mathbf{r} \leq \mathbf{s}$ allora $\mathbf{r} + \mathbf{t} \leq \mathbf{s} + \mathbf{t}$

Appendice 2

Teorema

La struttura $\mathscr{R}^* = (\mathbb{R}^*, +, \cdot, \leq)$ *è un campo ordinato.*

- per ogni $\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t} \in \mathbb{R}^*$, se $\mathbf{r} \leq \mathbf{s}$ allora $\mathbf{r} + \mathbf{t} \leq \mathbf{s} + \mathbf{t}$

  Se $\mathbf{r} \leq \mathbf{s}$ si ha che

$$\{i \in \mathbb{N} \mid r_i \leq s_i\} \in \mathcal{U}$$

  e dunque

$$\{i \in \mathbb{N} \mid r_i \leq s_i\} = \{i \in \mathbb{N} \mid r_i + t_i \leq s_i + t_i\}$$

  per le proprietà dei numeri reali.

Appendice 2

Teorema

La struttura $\mathscr{R}^* = (\mathbb{R}^*, +, \cdot, \leq)$ *è un campo ordinato.*

- per ogni $\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t} \in \mathbb{R}^*$, se $\mathbf{r} \leq \mathbf{s}$ allora $\mathbf{r} + \mathbf{t} \leq \mathbf{s} + \mathbf{t}$
- per ogni $\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t} \in \mathbb{R}^*$, se $\mathbf{r} \leq \mathbf{s}$ e $\mathbf{t} \geq \mathbf{0}$ allora $\mathbf{r} \cdot \mathbf{t} \leq \mathbf{s} \cdot \mathbf{t}$

Appendice 2

Teorema

La struttura $\mathscr{R}^* = (\mathbb{R}^*, +, \cdot, \leq)$ è un campo ordinato.

- per ogni $\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t} \in \mathbb{R}^*$, se $\mathbf{r} \leq \mathbf{s}$ allora $\mathbf{r} + \mathbf{t} \leq \mathbf{s} + \mathbf{t}$
- per ogni $\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t} \in \mathbb{R}^*$, se $\mathbf{r} \leq \mathbf{s}$ e $\mathbf{t} \geq \mathbf{0}$ allora $\mathbf{r} \cdot \mathbf{t} \leq \mathbf{s} \cdot \mathbf{t}$

Siano $\mathbf{r} \leq \mathbf{s}$ e $\mathbf{t} \geq \mathbf{0}$, dunque

$$\{i \in \mathbb{N} \mid r_i \leq s_i\} \in \mathcal{U} \quad \text{e} \quad \{i \in \mathbb{N} \mid t_i \geq 0\} \in \mathcal{U}$$

Si ha che

$$\{i \in \mathbb{N} \mid r_i \cdot t_i \leq s_i \cdot t_i\} \supseteq \{i \in \mathbb{N} \mid r_i \leq s_i \text{ e } t_i \geq 0\} =$$

$$= \{i \in \mathbb{N} \mid r_i \leq s_i\} \cap \{i \in \mathbb{N} \mid t_i \geq 0\} \in \mathcal{U}$$

Appendice 2

Teorema

La struttura $\mathscr{R}^* = (\mathbb{R}^*, +, \cdot, \leq)$ *è un campo ordinato.*

- per ogni $\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t} \in \mathbb{R}^*$, se $\mathbf{r} \leq \mathbf{s}$ allora $\mathbf{r} + \mathbf{t} \leq \mathbf{s} + \mathbf{t}$
- per ogni $\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t} \in \mathbb{R}^*$, se $\mathbf{r} \leq \mathbf{s}$ e $\mathbf{t} \geq \mathbf{0}$ allora $\mathbf{r} \cdot \mathbf{t} \leq \mathbf{s} \cdot \mathbf{t}$
- per ogni $\mathbf{r}, \mathbf{s} \in \mathbb{R}^*$, $\mathbf{r} \leq \mathbf{s}$ o $\mathbf{s} \leq \mathbf{r}$ (dicotomia)

Appendice 2

Teorema

La struttura $\mathscr{R}^* = (\mathbb{R}^*, +, \cdot, \leq)$ *è un campo ordinato.*

- per ogni $\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t} \in \mathbb{R}^*$, se $\mathbf{r} \leq \mathbf{s}$ allora $\mathbf{r} + \mathbf{t} \leq \mathbf{s} + \mathbf{t}$
- per ogni $\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t} \in \mathbb{R}^*$, se $\mathbf{r} \leq \mathbf{s}$ e $\mathbf{t} \geq \mathbf{0}$ allora $\mathbf{r} \cdot \mathbf{t} \leq \mathbf{s} \cdot \mathbf{t}$
- per ogni $\mathbf{r}, \mathbf{s} \in \mathbb{R}^*$, $\mathbf{r} \leq \mathbf{s}$ o $\mathbf{s} \leq \mathbf{r}$ (dicotomia)

  Sia $\mathbf{r} \not\leq \mathbf{s}$. Allora $\{i \in \mathbb{N} \mid r_i \leq s_i\} \notin \mathcal{U}$ e il complementare $\{i \in \mathbb{N} \mid r_i > s_i\} \in \mathcal{U}$. Dato che si ha

$$\{i \in \mathbb{N} \mid r_i \geq s_i\} \supseteq \{i \in \mathbb{N} \mid r_i > s_i\} \in \mathcal{U}$$

anche il primo insieme appartiene a $\mathcal{U}$, cioè $\mathbf{r} \geq \mathbf{s}$. $\square$ Indietro

Appendice 3

Teorema

1. *Somme, differenze e prodotti di infinitesimi sono infinitesimi;*
2. *il prodotto di un infinitesimo e di un numero finito è infinitesimo.*

Dimostrazione.

1. Siano ε e δ infinitesimi e $r > 0$ standard. Allora

$$|\varepsilon| < \frac{r}{2} \text{ e } |\delta| < \frac{r}{2} \quad \Rightarrow \quad |\varepsilon + \delta| < r \text{ e } |\varepsilon - \delta| < r$$

$$|\varepsilon| < \sqrt{r} \text{ e } |\delta| < \sqrt{r} \quad \Rightarrow \quad |\varepsilon\delta| < r$$

Appendice 3

Teorema

1. *Somme, differenze e prodotti di infinitesimi sono infinitesimi;*
2. *il prodotto di un infinitesimo e di un numero finito è infinitesimo.*

Dimostrazione.

2. Sia ε infinitesimo e b finito. Allora $|b| < s$ per qualche $s > 0$ standard. Dunque, per ogni $r > 0$ standard si ha

$$|\varepsilon| < \frac{r}{s} \quad \Rightarrow \quad |\varepsilon b| < r$$

cioè εb è infinitesimo. $\square$ Indietro

Appendice 4 - Estensioni non standard

Si può dimostrare l'esistenza di una corrispondenza $*$, detta estensione non standard, che generalizza la funzione $*\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ considerata in precedenza e che associa ad ogni oggetto standard A dell'analisi elementare un unico oggetto non standard A^*, in modo che siano verificate le proprietà seguenti:

- se x è un numero reale o una n-upla di numeri reali, $x^* = x$;
- se A è un insieme standard, $A^* \supseteq A$ è un suo soprainsieme ($A^* = A$ se e solo se A è finito);
- se $f\colon A \to B$ è una funzione standard, $f^*\colon A^* \to B^*$ è una sua estensione (detta estensione naturale di f), cioè $f^*(a) = f(a)$ per ogni $a \in A$. Inoltre, se f è definita da una certa regola applicata ai numeri reali, f^* è definita dalla stessa regola applicata ai numeri iperreali;

Appendice 5 - Principio di transfer (versione informale)

Sia $P(a_1, \dots, a_n)$ una proprietà degli oggetti standard $a_1, \dots, a_n$ espressa in forma elementare. Allora $P(a_1, \dots, a_n)$ vale se e solo se la stessa proprietà vale per le corrispondenti estensioni non standard, cioè

$$P(a_1, \dots, a_n) \quad \Leftrightarrow \quad P(a_1^*, \dots, a_n^*)$$

Le estensioni delle relazioni $<$, $\leq$, $=$ e delle operazioni $+$ e $\cdot$ sui numeri iperreali sono esattamente quelle che abbiamo definito sulle classi di equivalenza di successioni reali.

Esempi

- Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$. Allora

$$f^* : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^* \qquad f^*(x) = x^2$$

Esempi

- Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$. Allora

$$f^* : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^* \qquad f^*(x) = x^2$$

- L'estensione dell'insieme $[a, b]$ è l'insieme

$$[a, b]^* = \{x \in \mathbb{R}^* \mid a \leq x \leq b\}$$

Esempi

- Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$. Allora

$$f^*\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^* \qquad f^*(x) = x^2$$

- L'estensione dell'insieme $[a, b]$ è l'insieme

$$[a, b]^* = \{x \in \mathbb{R}^* \mid a \leq x \leq b\}$$

- Se $h\colon \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} \to \mathbb{R}$ definita da $h(x) = \sqrt{x}$, la sua estensione naturale h^* è

$$h^*\colon \{x \in \mathbb{R}^* \mid x \geq 0\} \to \mathbb{R}^* \qquad h^*(x) = \sqrt{x}$$

Esempi

- Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$. Allora
$$f^*\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^* \qquad f^*(x) = x^2$$
- L'estensione dell'insieme $[a,b]$ è l'insieme
$$[a,b]^* = \{x \in \mathbb{R}^* \mid a \leq x \leq b\}$$
- Se $h\colon \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} \to \mathbb{R}$ definita da $h(x) = \sqrt{x}$, la sua estensione naturale h^* è
$$h^*\colon \{x \in \mathbb{R}^* \mid x \geq 0\} \to \mathbb{R}^* \qquad h^*(x) = \sqrt{x}$$
- L'estensione dell'insieme $\mathbb{N}$ è l'insieme $\mathbb{N}^*$ dei numeri ipernaturali. Si dimostra che $\mathbb{N}^*$ contiene anche numeri infiniti del tipo
$$\omega = [\langle 1,2,3,\ldots\rangle], \quad \omega + 1 = [\langle 2,3,4\ldots\rangle], \quad \omega + 2, \quad \ldots$$

Esempi

Per trasferire le proprietà si può applicare il principio di transfer mediante la costruzione di enunciati elementari

- La trasformazione dell'enunciato

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})[x + y = y + x]$$

  è l'enunciato

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*)(\forall y \in \mathbb{R}^*)[x + y = y + x]$$

Esempi

Per trasferire le proprietà si può applicare il principio di transfer mediante la costruzione di enunciati elementari

- La trasformazione dell'enunciato

  $$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})[x + y = y + x]$$

  è l'enunciato

  $$(\forall x \in \mathbb{R}^*)(\forall y \in \mathbb{R}^*)[x + y = y + x]$$

- La trasformazione dell'enunciato

  $$(\forall x \in \mathbb{R})[x < 0 \vee (\exists y \in \mathbb{R})(y \cdot y = x)]$$

  è l'enunciato

  $$(\forall x \in \mathbb{R}^*)[x < 0 \vee (\exists y \in \mathbb{R}^*)(y \cdot y = x)]$$

Esempi

È possibile omettere l'asterisco delle estensioni naturali di funzioni.

- La trasformazione dell'enunciato

$$(\forall x \in \mathbb{R})[\sin(x + 2\pi) = \sin(x)]$$

è l'enunciato

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*)[\sin^*(x + 2\pi) = \sin^*(x)]$$

che riscriviamo più semplicemente

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*)[\sin(x + 2\pi) = \sin(x)]$$

Esempi

Allo stesso modo si vede che valgono gli enunciati elementari:

- $(\forall x \in \mathbb{R}^*)[\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1]$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^*)[\cos(x + \pi) = -\cos(x)]$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^*)(\forall y \in \mathbb{R}^*)[x > 0 \rightarrow \log(x^y) = y \log(x)]$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^*)(\forall y \in \mathbb{R}^*)[e^{x+y} = e^x \cdot e^y]$

Appendice 6 - Enunciati non trasferibili

Gli enunciati seguenti non possono essere trasferiti a $\mathbb{R}^*$ mantenendo il loro significato originario

- **proprietà di Archimede**: per ogni $x \in \mathbb{R}$, esiste un numero $n \in \mathbb{N}$ tale che $x < n$
- **completezza di** $\mathbb{R}$: per ogni $X \subseteq \mathbb{R}$, se $X \neq \varnothing$ ed è superiormente limitato, allora ammette un estremo superiore
- **principio di induzione**: per ogni $X \subseteq \mathbb{N}$, se $0 \in X$ e se, per ogni n, $[n \in X \rightarrow n+1 \in X]$, allora $X = \mathbb{N}$

La proprietà di Archimede

$\mathbb{R}$ è un campo ordinato archimedeo, cioè ogni suo elemento è minore di qualche intero *standard*.

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{N})[x < n]$$

La $*$-trasformazione di questo enunciato è

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*)(\exists n \in \mathbb{N}^*)[x < n]$$

che non ha lo stesso significato di prima: il campo $\mathbb{R}^*$ è $*$-archimedeo, ma *non* è archimedeo.

La completezza

$\mathbb{R}$ è un campo ordinato completo, cioè ogni suo sottoinsieme non vuoto e superiormente limitato ammette estremo superiore.

Se Φ è la formula che afferma che, se $x \neq \varnothing$ e x è superiormente limitato, allora x ha estremo superiore, la completezza di $\mathbb{R}$ si formalizza con

$$(\forall x \in \mathcal{P}(\mathbb{R}))[\Phi]$$

la cui $*$-trasformazione è

$$(\forall x \in \mathcal{P}(\mathbb{R})^*)[\Phi^*]$$

Dunque $\mathbb{R}^*$ è $*$-completo, ma *non* è completo poiché $\mathcal{P}(\mathbb{R})^* \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^*)$. Ad esempio l'insieme $m(0)$ degli infinitesimi è non vuoto e superiormente limitato, ma non ha estremo superiore in $\mathbb{R}^*$.

Il principio di induzione

Un sottoinsieme di $\mathbb{N}$ che contiene 0 ed è chiuso rispetto alla funzione successore $n \mapsto n+1$ è uguale a $\mathbb{N}$.

$$(\forall x \in \mathcal{P}(\mathbb{N}))[0 \in x \;\wedge\; (\forall y \in x)(y+1 \in x) \;\rightarrow\; x = \mathbb{N}]$$

La $*$-trasformazione di questo enunciato è

$$(\forall x \in \mathcal{P}(\mathbb{N})^*)[0 \in x \;\wedge\; (\forall y \in x)(y+1 \in x) \;\rightarrow\; x = \mathbb{N}^*]$$

che ancora non ha lo stesso significato di prima: i numeri ipernaturali soddisfano la $*$-induzione, cioè l'induzione per i soli sottoinsiemi di $\mathbb{N}^*$ che appartengono a $\mathcal{P}(\mathbb{N})^* \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$.

Appendice 7 - Il principio di permanenza

Sia $c \in \mathbb{R}$. L'estensione di una proprietà vale per tutti i punti della monade di c se e solo se tale proprietà vale in un intorno $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$ reale.

Appendice 7 - Il principio di permanenza

Sia $c \in \mathbb{R}$. L'estensione di una proprietà vale per tutti i punti della monade di c se e solo se tale proprietà vale in un intorno $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$ reale.

Sia $\varphi(x)$ una formula per cui esiste $\delta \approx 0$ positivo tale che

$$\boxed{\varphi^*(x) \text{ è vera per tutti gli } x \in \mathbb{R}^* \text{ con } c - \delta < x < c + \delta}$$

Appendice 7 - Il principio di permanenza

Sia $c \in \mathbb{R}$. L'estensione di una proprietà vale per tutti i punti della monade di c se e solo se tale proprietà vale in un intorno $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$ reale.

Sia $\varphi(x)$ una formula per cui esiste $\delta \approx 0$ positivo tale che

$\varphi^*(x)$ è vera per tutti gli $x \in \mathbb{R}^*$ con $c - \delta < x < c + \delta$

allora è vero l'enunciato

$$(\exists y \in \mathbb{R}^*_+)(\forall x \in \mathbb{R}^*)[|x - c| < y \rightarrow \varphi^*]$$

Appendice 7 - Il principio di permanenza

Sia $c \in \mathbb{R}$. L'estensione di una proprietà vale per tutti i punti della monade di c se e solo se tale proprietà vale in un intorno $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$ reale.

Sia $\varphi(x)$ una formula per cui esiste $\delta \approx 0$ positivo tale che

$$\boxed{\varphi^*(x) \text{ è vera per tutti gli } x \in \mathbb{R}^* \text{ con } c - \delta < x < c + \delta}$$

allora è vero l'enunciato

$$(\exists y \in \mathbb{R}^*_+)(\forall x \in \mathbb{R}^*)[|x - c| < y \rightarrow \varphi^*]$$

per transfer, esiste $\varepsilon > 0$ reale tale che

$$(\forall x \in \mathbb{R})[|x - c| < \varepsilon \rightarrow \varphi]$$

Appendice 7 - Il principio di permanenza

Sia $c \in \mathbb{R}$. L'estensione di una proprietà vale per tutti i punti della monade di c se e solo se tale proprietà vale in un intorno $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$ reale.

Sia $\varphi(x)$ una formula per cui esiste $\delta \approx 0$ positivo tale che

$$\boxed{\varphi^*(x) \text{ è vera per tutti gli } x \in \mathbb{R}^* \text{ con } c - \delta < x < c + \delta}$$

e ancora per transfer (ε rimane sempre una costante reale)

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*)[|x - c| < \varepsilon \rightarrow \varphi^*]$$

Appendice 7 - Il principio di permanenza

Sia $c \in \mathbb{R}$. L'estensione di una proprietà vale per tutti i punti della monade di c se e solo se tale proprietà vale in un intorno $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$ reale.

Sia $\varphi(x)$ una formula per cui esiste $\delta \approx 0$ positivo tale che

$\varphi^*(x)$ è vera per tutti gli $x \in \mathbb{R}^*$ con $c - \delta < x < c + \delta$

e ancora per transfer (ε rimane sempre una costante reale)

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*)[|x-c| < \varepsilon \rightarrow \varphi^*]$$

dunque $\varphi(x)$ è una formula per cui esiste $\varepsilon > 0$ reale tale che

$\varphi^*(x)$ è vera per tutti gli $x \in \mathbb{R}^*$ con $c - \varepsilon < x < c + \varepsilon$

Applicazioni del principio di permanenza

- Se f è una funzione reale e $c \in \mathbb{R}$, $f(x)$ è definita per ogni $x \approx c$ se e solo se $f(x)$ è definita per tutti gli x reali in un intorno $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ di raggio reale $\varepsilon > 0$.

Applicazioni del principio di permanenza

- Se f è una funzione reale e $c \in \mathbb{R}$, $f(x)$ è definita per ogni $x \approx c$ se e solo se $f(x)$ è definita per tutti gli x reali in un intorno $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ di raggio reale $\varepsilon > 0$.
- Sia f è una funzione reale definita in un intorno di $c \in \mathbb{R}$. Se $f(x) > 0$ per ogni x nella monade di c, allora $f(x) > 0$ in qualche intervallo $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}$.

Applicazioni del principio di permanenza

- Se f è una funzione reale e $c \in \mathbb{R}$, $f(x)$ è definita per ogni $x \approx c$ se e solo se $f(x)$ è definita per tutti gli x reali in un intorno $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ di raggio reale $\varepsilon > 0$.
- Sia f è una funzione reale definita in un intorno di $c \in \mathbb{R}$. Se $f(x) > 0$ per ogni x nella monade di c, allora $f(x) > 0$ in qualche intervallo $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}$.
- La funzione reale f ha un massimo locale in c se e solo se $f(x)$ è definita e $f(c) \geq f(x)$ per tutti gli iperreali $x \approx c$.

Questa presentazione è reperibile al sito
http://rdossena.altervista.org
(sezione "Articoli")

Grazie dell'attenzione!