L'analisi non standard in un possibile percorso di formazione dei futuri insegnanti di Matematica

Marco Degiovanni

Università Cattolica del Sacro Cuore

I due principali approcci

I due principali approcci

A. Robinson, “Non-standard analysis”,
North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1966.

E. Nelson, Internal set theory: a new approach to nonstandard analysis, *Bull. Amer. Math. Soc.* **83** (1977), *no.* 6, 1165–1198.

I due principali approcci

A. Robinson, "Non-standard analysis",
North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1966.

E. Nelson, Internal set theory: a new approach to nonstandard analysis, *Bull. Amer. Math. Soc.* **83** (1977), *no.* 6, 1165–1198.

Von Neumann:

"Young man, in mathematics you don't understand things. You just get used to them".

Approccio alla Nelson

Approccio alla Nelson

Una nuova frase aperta in una variabile:

Approccio alla Nelson

Una nuova frase aperta in una variabile:

$$x \text{ è standard,}$$

dove x è un qualunque oggetto matematico.

Approccio alla Nelson

Una nuova frase aperta in una variabile:

$$x \text{ è standard,}$$

dove x è un qualunque oggetto matematico.

Una frase aperta della Matematica si dice *classica* se è esprimibile senza utilizzare questa nuova frase aperta.

Approccio alla Nelson

Quanto classicamente già acquisito rimane valido, con la seguente precisazione:

Quanto classicamente già acquisito rimane valido, con la seguente precisazione:

se X *è un insieme e* $\mathcal{P}(x)$ *è una frase aperta* **classica**, *allora esiste uno ed un solo insieme, denotato con*

$$\{x \in X|\ \mathcal{P}(x)\}\ ,$$

che ha per elementi gli x *in* X *che soddisfano* $\mathcal{P}(x)$.

Approccio alla Nelson

Sia $A \subseteq \mathbb{N}$ *tale che*

$$0 \in A\,,$$
$$\forall n \quad n \in A \Rightarrow (n+1) \in A\,.$$

Allora $A = \mathbb{N}$.

Approccio alla Nelson

Sia $A \subseteq \mathbb{N}$ *tale che*

$$0 \in A\,,$$
$$\forall n \quad n \in A \Rightarrow (n+1) \in A\,.$$

Allora $A = \mathbb{N}$.

Sia $\mathcal{P}(n)$ *una frase aperta* **classica** *tale che*

$$\mathcal{P}(0)\,,$$
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)\,.$$

Allora $\mathcal{P}(n)$ *è vera per ogni* $n \in \mathbb{N}$.

Sia $A \subseteq \mathbb{N}$ *tale che*

$$0 \in A\,,$$
$$\forall n \quad n \in A \Rightarrow (n+1) \in A\,.$$

Allora $A = \mathbb{N}$.

Sia $\mathcal{P}(n)$ *una frase aperta* **classica** *tale che*

$$\mathcal{P}(0)\,,$$
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)\,.$$

Allora $\mathcal{P}(n)$ *è vera per ogni* $n \in \mathbb{N}$.

Occorre poter considerare

$$A = \{n \in \mathbb{N} |\ \mathcal{P}(n)\}\ .$$

Approccio alla Nelson

Approccio alla Nelson

- *Se un insieme X è determinato in modo classico e univoco a partire da insiemi standard (eventualmente a partire da nessun insieme), allora X è standard.*

- *Se un insieme X è determinato in modo classico e univoco a partire da insiemi standard (eventualmente a partire da nessun insieme), allora X è standard.*

Ad esempio, l'insieme vuoto $\emptyset$ è standard, perché è determinato in modo classico e univoco da

$$\forall x \quad x \notin \emptyset \,.$$

Approccio alla Nelson

- *Se un insieme X è determinato in modo classico e univoco a partire da insiemi standard (eventualmente a partire da nessun insieme), allora X è standard.*

Ad esempio, l'insieme vuoto $\emptyset$ è standard, perché è determinato in modo classico e univoco da

$$\forall x \quad x \notin \emptyset \,.$$

Attraverso opportune procedure insiemistiche classiche e univoche, è possibile determinare $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, che sono quindi tutti insiemi standard, così come sono standard gli elementi 0 e 1 (e anche i in $\mathbb{C}$).

Approccio alla Nelson

Approccio alla Nelson

- *Per ogni insieme X esiste un sottoinsieme finito F contenente tutti gli elementi standard di X (e forse anche altri elementi).*

Approccio alla Nelson

- *Per ogni insieme X esiste un sottoinsieme finito F contenente tutti gli elementi standard di X (e forse anche altri elementi).*

L'elemento 0 in $\mathbb{N}$ è standard.

Approccio alla Nelson

- *Per ogni insieme X esiste un sottoinsieme finito F contenente tutti gli elementi standard di X (e forse anche altri elementi).*

L'elemento 0 in $\mathbb{N}$ è standard.
Se n è un elemento standard in $\mathbb{N}$, allora $n+1$ è standard.

- *Per ogni insieme X esiste un sottoinsieme finito F contenente tutti gli elementi standard di X (e forse anche altri elementi).*

L'elemento 0 in $\mathbb{N}$ è standard.
Se n è un elemento standard in $\mathbb{N}$, allora $n+1$ è standard.
Esistono elementi non standard in $\mathbb{N}$.

Approccio alla Nelson

Approccio alla Nelson

Due numeri reali x e y si dicono *infinitamente vicini* (in simboli $x \simeq y$), se $|x - y| < \varepsilon$ per ogni ε reale con $\varepsilon > 0$ e ε standard.

Approccio alla Nelson

Due numeri reali x e y si dicono *infinitamente vicini* (in simboli $x \simeq y$), se $|x - y| < \varepsilon$ per ogni ε reale con $\varepsilon > 0$ e ε standard.

Un numero reale x si dice *infinitamente grande* se $x \neq 0$ e $1/x \simeq 0$.

Approccio alla Nelson

Siano $f : \mathrm{dom}\,(f) \to \mathbb{R}$ una funzione con $\mathrm{dom}\,(f) \subseteq \mathbb{R}$ e $x \in \mathrm{dom}\,(f)$.
Diciamo che f è *continua in* x se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che $|f(\xi) - f(x)| < \varepsilon$ ogniqualvolta $\xi \in \mathrm{dom}\,(f)$ con $|\xi - x| < \delta$.
Diciamo che f è *continua*, se lo è in ogni $x \in \mathrm{dom}\,(f)$.

Approccio alla Nelson

- *Siano* $f : \mathrm{dom}\,(f) \to \mathbb{R}$ *una funzione con* $\mathrm{dom}\,(f) \subseteq \mathbb{R}$ *e* $x \in \mathrm{dom}\,(f)$*.*

Approccio alla Nelson

- *Siano* $f : \mathrm{dom}\,(f) \to \mathbb{R}$ *una funzione con* $\mathrm{dom}\,(f) \subseteq \mathbb{R}$ *e* $x \in \mathrm{dom}\,(f)$.
  Supponiamo che f *e* x *siano standard.*

- *Siano* $f : \mathrm{dom}\,(f) \to \mathbb{R}$ *una funzione con* $\mathrm{dom}\,(f) \subseteq \mathbb{R}$ *e* $x \in \mathrm{dom}\,(f)$. *Supponiamo che* f *e* x *siano standard.* *Allora* f *è continua in* x *se e solo se risulta* $f(\xi) \simeq f(x)$ *ogniqualvolta* $\xi \in \mathrm{dom}\,(f)$ *con* $\xi \simeq x$.

Approccio alla Nelson

- *Siano* $f : \mathrm{dom}\,(f) \to \mathbb{R}$ *una funzione con* $\mathrm{dom}\,(f) \subseteq \mathbb{R}$ *e* $x \in \mathrm{dom}\,(f)$*.*
  Supponiamo che f *e* x *siano standard.*
  Allora f *è continua in* x *se e solo se risulta* $f(\xi) \simeq f(x)$ *ogniqualvolta* $\xi \in \mathrm{dom}\,(f)$ *con* $\xi \simeq x$*.*

- *Se un insieme standard non possiede elementi standard, allora è vuoto.*

Approccio alla Nelson

- *Siano* $f : \mathrm{dom}\,(f) \to \mathbb{R}$ *una funzione con* $\mathrm{dom}\,(f) \subseteq \mathbb{R}$ *e* $x \in \mathrm{dom}\,(f)$*.*
  Supponiamo che f *e* x *siano standard.*
  Allora f *è continua in* x *se e solo se risulta* $f(\xi) \simeq f(x)$ *ogniqualvolta* $\xi \in \mathrm{dom}\,(f)$ *con* $\xi \simeq x$*.*

- *Se un insieme standard non possiede elementi standard, allora è vuoto.*
- *Se* ξ *è un numero reale non infinitamente grande, allora esiste uno ed un solo numero reale* x*, con* x *standard, tale che* $\xi \simeq x$*.*

Teorema di Weierstrass
Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *è continua, allora* f *ammette massimo e minimo.*

Teorema di Weierstrass
Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua, allora f ammette massimo e minimo.

Prima si dimostra l'affermazione nel caso particolare in cui f è standard.

Teorema di Weierstrass
Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua, allora f ammette massimo e minimo.

Prima si dimostra l'affermazione nel caso particolare in cui f è standard.
Allora l'insieme delle funzioni f per cui l'affermazione è falsa è standard

Teorema di Weierstrass
Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *è continua, allora* f *ammette massimo e minimo.*

Prima si dimostra l'affermazione nel caso particolare in cui f è standard.
Allora l'insieme delle funzioni f per cui l'affermazione è falsa è standard
e non possiede elementi standard.

Teorema di Weierstrass
Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua, allora f ammette massimo e minimo.

Prima si dimostra l'affermazione nel caso particolare in cui f è standard.
Allora l'insieme delle funzioni f per cui l'affermazione è falsa è standard
e non possiede elementi standard.
L'insieme delle funzioni f per cui l'affermazione è falsa è vuoto.