Analisi Non Standard

Una versione light

Andrea Centomo
Liceo "F. Corradini" di Thiene

Padova, 28 settembre 2018

Tavola dei contenuti

Breve storia

Un lungo percorso

Analisi Non-standard (acronimo NSA)

Il precursore: G.W. Leibniz (1646 – 1716)

Tre tappe fondamentali:

- A. Robinson: *Non-standard analysis* (1966) [5]
- J. Keisler: *Foundation of Infinitesimal Calculus* (1976) [4]
- T. Tao: Ultrafilters, nonstandard analysis, and... (2007) [6]

Giornate di studio NSA (2011 – 2017)

Esperienze sul campo: III anno del liceo linguistico e scientifico.

Tangente alla Leibniz

Numeri iperreali

Per poter affrontare le questioni di tangenza in NSA:

- $\mathbb{R}^*$ (campo ordinato dei numeri iperreali) ampliamento del campo ordinato $\mathbb{R}$ con numeri infinitesimi e infiniti;
- f^* estensione naturale di una funzione reale di variabile reale f;
- parte standard di un numero iperreale finito o infinitesimo e relazione di infinita vicinanza $\approx$.

Per le funzioni polinomiali e razionali tutto funziona senza intoppi.

A livello didattico:

1. concetto intuitivo di numero iperreale infinitesimo ϵ
$$-\frac{1}{n} < \epsilon < \frac{1}{n}$$
per ogni $n \in \mathbb{Z}^+$;
2. introdurre i rimanenti concetti attraverso un esempio semplice.

Esempio semplice

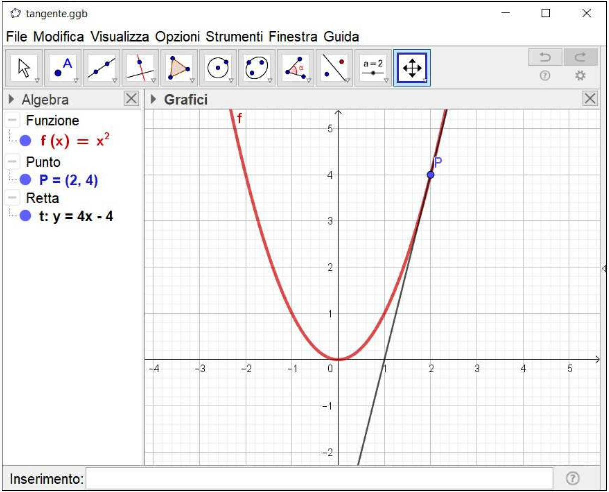

Figura 1: Tangente a una parabola

Tangente alla Leibniz

Determinare la tangente al grafico di

$$f(x) = x^2$$

nel punto di ascissa $x = 2$. Si procede come segue:

1. prendo due punti infinitamente vicini sul grafico di f^*

$$(2, 4) \qquad (2 + \epsilon, 4 + 4\epsilon + \epsilon^2)$$

   con ϵ iperreale infinitesimo non nullo;
2. calcolo la pendenza della retta passante per i due punti

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{4\epsilon + \epsilon^2}{\epsilon} = 4 + \epsilon$$

3. la pendenza della retta tangente per definizione è

$$m_t = st(m) = 4 \approx 4 + \epsilon$$

in conclusione l'equazione della retta tangente t è:

$$y - 4 = 4(x - 2) \qquad y = 4x - 4.$$

Generalizziamo

Mimando il procedimento dell'esempio precedente

In generale:

la pendenza m_t della retta tangente al grafico di una funzione polinomiale di II grado

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, in x è

$$m_t = 2ax + b.$$

Considerazioni e esercizi:

- nel punto di estremo $m_t = 0$ (vertice parabola);
- esercizi sulle tangenti;
- problemi di massimo e minimo di II grado.

Metodo di Fermat

Un problema di massimo classico

Alcuni anni fa (2006) a un convegno a Padova sull'approssimazione [1]:

Problema

Da un quadrato di carta di lato 2 decimetri, ritagliando opportunamente quattro quadrati agli angoli, ottenere la scatola di volume massimo.

Indicato con x il lato del quadrato da ritagliare si tratta di determinare il punto di massimo di

$$f(x) = x(2-2x)^2 = 4x^3 - 8x^2 + 4x$$

con $x \in [0, 1]$.

Dopo aver impostato il problema viene mostrato il grafico di f da cui si intuisce che il problema ammette una soluzione unica. Come trovarla?

Esempio semplice

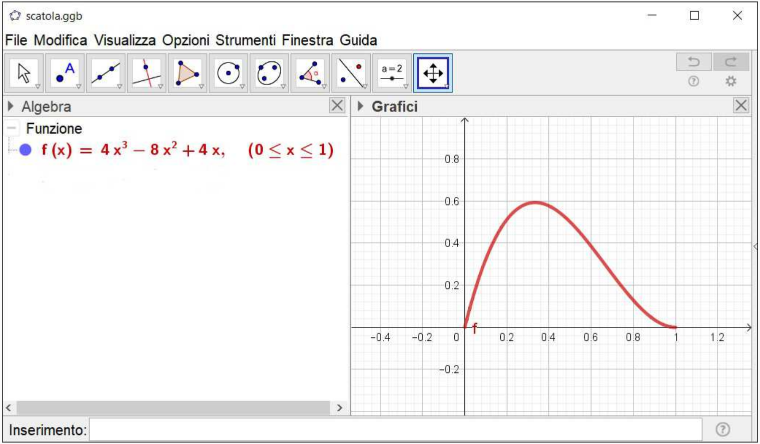

Figura 2: Grafico di f

Soluzione alla Fermat

Sia $\epsilon \neq 0$ un numero iperreale infinitesimo

$$f(x+\epsilon) - f(x) = (12x^2 - 16x + 4)\epsilon + (12x - 8)\epsilon^2 + 4\epsilon^3$$

Allora

$$\frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon} = 12x^2 - 16x + 4 + (12x - 8)\epsilon + 4\epsilon^2$$

il punto di massimo è la soluzione in $(0, 1)$ dell'equazione

$$12x^2 - 16x + 4 = 0 \qquad x = \frac{1}{3}$$

Nel punto di massimo la tangente è orizzontale ma anche

$$f(1/3+\epsilon) - f(1/3) = -4\epsilon^2 + 4\epsilon^3 \implies f(1/3+\epsilon) < f(1/3).$$

Principio di trasferimento

Attenzione!

Dai conti si ha che $1/3$ è un punto di massimo della restrizione di f^* alla monade

$$m(1/3) = \{x \in \mathbb{R}^* : x \approx 1/3\}$$

non un punto di massimo locale di f.

Quanto accade in una monade ha veramente valore locale? Il principio di trasferimento garantisce questo fatto.

Considerazioni e esercizi:

- iniziamo a parlare di funzione derivata;
- studio qualitativo di funzioni polinomiali di III grado;
- problemi di massimo e minimo di III grado.

Quadratura alla Barrow

Teorema fondamentale del calcolo integrale

Data la funzione $f(x) = x^2$ vogliamo calcolare l'area del trapezoide di base $[0, 2]$.

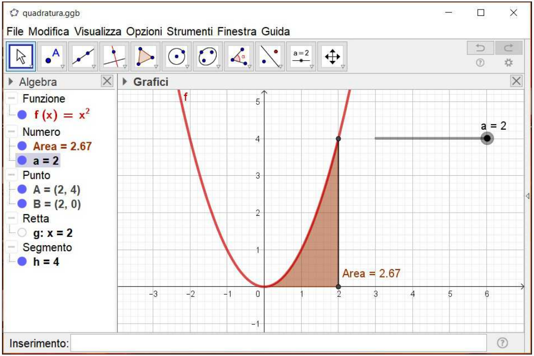

Figura 3: Trapezoide di f

Soluzione alla Barrow

Assumiamo per ipotesi che esista un funzione definita non negativa $S(x)$ che rappresenta l'area del trapezoide di f di base $[0, x]$ con $x \in [0, 2]$.

Per infiniti valori di $\delta \in \mathbb{R}^+$

$$\delta x^2 < S(x+\delta) - S(x) < \delta(x+\delta)^2.$$

Se prendiamo un numero iperreale infinitesimo $\epsilon > 0$ avremo ancora

$$\epsilon x^2 < S(x+\epsilon) - S(x) < \epsilon(x+\epsilon)^2$$

da cui

$$S(x+\epsilon) - S(x) \approx \epsilon x^2$$

e

$$\frac{S(x+\epsilon) - S(x)}{\epsilon} \approx x^2 \qquad S'(x) = x^2$$

allora $S(x) = x^3/3$ e $S(2) = 8/3$.

Funzioni omografiche

Numeri iperreali e asintoti

Se $\epsilon > 0$ è un infinitesimo allora

$$\omega = \frac{1}{\epsilon} > 0$$

è un numero iperreale infinito (positivo).

Presa una funzione omografica (grafico iperbole). Ad esempio,

$$g(x) = \frac{x+1}{x+2}$$

avremo

$$g(\omega) = \frac{\omega+1}{\omega+2} = \frac{1+1/\omega}{1+2/\omega} \approx 1$$

in questo modo possiamo introdurre l'idea di asintoto orizzontale. Inoltre

$$g(-2+\epsilon) = \frac{-1+\epsilon}{\epsilon} = -\omega + 1 \sim -\omega$$

introducendo l'idea di asintoto verticale.

Esercizi:

- studio qualitativo di funzioni omografiche.

Asintoti iperbole

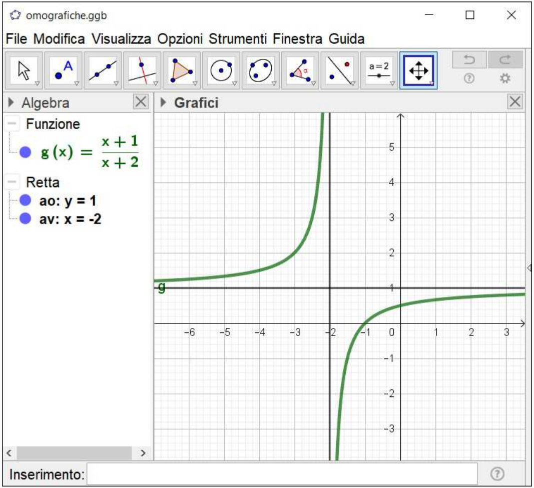

Figura 4: Grafico di g

Conclusioni

Conclusioni

- NSA svolge un ruolo efficace nel collegamento tra strumenti di visualizzazione (GeoGebra) e giustificazione rigorosa dei concetti.
- Gli elementi di NSA visibili allo studente sono pochi: nozione intuitiva di numero iperreale infinitesimo e infinito, relazione di infinita vicinanza e idea di parte standard.
- Problemi storicamente rilevanti nello sviluppo dell'Analisi vengono riportati all'interno di un modello NSA ben fondato.

Grazie per l'attenzione!

"*Rather there are good reasons to believe that non-standard analysis, in some version or other, will be the analysis of the future.*"

– K. Gödel

"*I hope I have shown that non-standard analysis is not a totally "alien" piece of mathematics, and that it is basically only "one ultrafilter away" from standard analysis.*"

– T. Tao (2006 Fields Medal)

Bibliografia e sitografia

- G. Artico, Dall'algebra all'analisi per la strada vecchia, L'approssimazione nella didattica della matematica, Ghisetti e Corvi, Milano, 2006.
- J.M. Lopez Fernandez, A commentary on Barrow's proof of the first fundamental theorem of calculus, Research Gate, 2015.
- M.G. Katz, D.M. Schaps, S. Shnider, Almost equal: the method of adequality from Diophantus to Fermat and beyond, Perspectives on Science 21 (3), arXiv 1210.7750.
- J. Keisler, *Foundation of Infinitesimal Calculus*. Prindle Weber & Schmidt, 1976.
- A. Robinson, *Non-standard analysis*, Princeton Landmarks in Mathematics (2nd ed.), Princeton University Press, 1996 [1966].
- T. Tao blog `https://terrytao.wordpress.com/`