Vogliamo ora studiare il gruppo E_2 di tutte le isometrie del piano. Se $\psi \in E_2$, $\psi: \mathbb{E}^2 \longrightarrow \mathbb{E}^2$ è tale per cui $\psi(\bar{o}) = \bar{o}$, allora abbiamo visto la volta scorsa che un teorema ci garantisce che ψ è lineare, ed anzi è una trasformazione ortogonale, cioè del tipo $A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ oppure $B_\beta \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix}$ per opportuni angoli α (di rotazione) o β (di riflessione su $\beta/2$).

Tali trasformazioni appartengono a quello che abbiamo chiamato GRUPPO ORTOGONALE O_2 DEL PIANO

$$O_2 = \left\{ \varphi: \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2 \;\middle|\; \varphi(P) = \varphi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{cases} A_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \text{oppure} \\ B_\beta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{cases} \right\}$$

Se invece $\psi(\bar{o}) = \bar{v} \neq \bar{o}$, allora detta $t_{\bar{v}}: \mathbb{E}^2 \longrightarrow \mathbb{E}^2$ la traslazione secondo $\bar{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$: $t_{\bar{v}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + v_x \\ y + v_y \end{pmatrix}$,

si ha che $t_{-\bar{v}} \circ \psi(\bar{o}) = t_{-\bar{v}}(\psi(\bar{o})) = t_{-\bar{v}}(\bar{v}) = \bar{o}$

così $t_{-\bar{v}} \circ \psi$ tiene fisso $\bar{o}$, ed allora $t_{-\bar{v}} \circ \psi \in O_2$ cioè

$$\underline{\underline{t_{-\bar{v}} \circ \psi = \varphi}} = \begin{cases} A_\alpha \\ \text{oppure} \\ B_\beta \end{cases} \quad \text{e dunque} \quad \underline{\underline{\psi}} = t_{\bar{v}} \circ \underbrace{t_{-\bar{v}} \circ \psi}_{\varphi} = \underline{\underline{t_{\bar{v}} \circ \varphi}}$$

In altre parole OGNI ISOMETRIA $\psi \in E_2$ DEL PIANO si lascia scrivere nella forma $\boxed{\psi = t_{\bar{v}} \circ \varphi}$, con

- $t_{\bar{v}} \in T_2$ (SOTTOGRUPPO DELLE TRASLAZIONI) e
- $\varphi = \begin{cases} A_\alpha \\ \text{oppure} \\ B_\beta \end{cases} \in O_2$ (SOTTOGRUPPO ORTOGONALE).

E_2 non è abeliano: vediamo come si comportano le moltiplicazioni:

- $\underline{t_{\bar v} \circ \varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{cases} A_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \\ \text{oppure} \\ B_\beta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \end{cases}$

- $\underline{\varphi \circ t_{\bar v} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \varphi \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \right) \underset{\varphi \text{ è lineare}}{=} \varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \varphi \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \underline{t_{\varphi(\bar v)} \circ \varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$

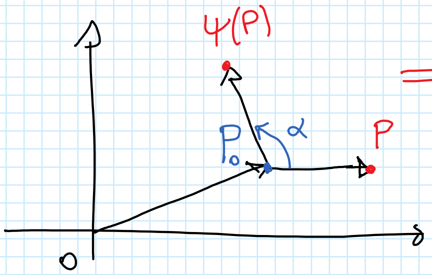
  $\neq t_{\bar v} \circ \varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

- $\underline{\varphi \circ t_{\bar v} \circ \varphi^{-1}} = (\varphi \circ t_{\bar v}) \circ \varphi^{-1} = (t_{\varphi(\bar v)} \circ \varphi) \circ \varphi^{-1} = t_{\varphi(\bar v)} \circ (\varphi \circ \varphi^{-1}) = \underline{t_{\varphi(\bar v)}}$

- $\underline{t_{\bar v_2} \circ t_{\bar v_1} = t_{\bar v_1 + \bar v_2}}$ e $\underline{t_{\bar v}^{-1} = t_{-\bar v}}$ $\Rightarrow$ T_2 è un sottogruppo abeliano di E_2.

Nel gruppo E_2 possiamo ritrovare in particolare le seguenti isometrie notevoli:

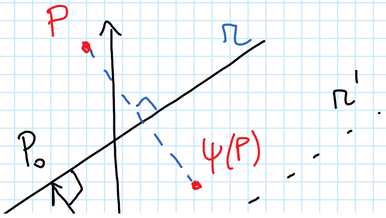
$\boxed{\text{ROTAZIONE DI UN ANGOLO } \alpha \text{ ATTORNO AD UN PUNTO } P_0}$



$$\underline{\underline{\psi}} = t_{P_0} \circ A_\alpha \circ t_{P_0}^{-1} = t_{P_0} \circ (A_\alpha \circ t_{-P_0}) = t_{P_0} \circ (t_{A_\alpha(-P_0)} \circ A_\alpha) =$$

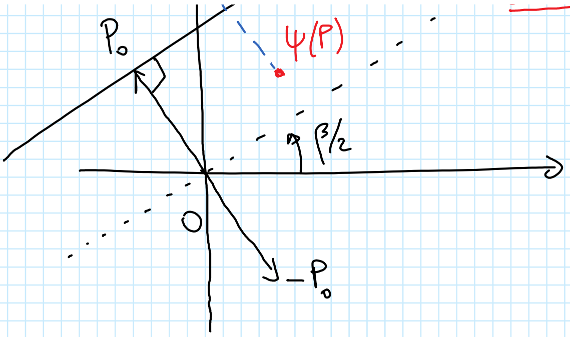
$$= (t_{P_0} \circ t_{A_\alpha(-P_0)}) \circ A_\alpha = \underline{\underline{t_{P_0 - A_\alpha P_0} \circ A_\alpha}}$$

$\boxed{\text{RIFLESSIONE SU UNA ARBITRARIA RETTA } r \text{ PER } P_0 \text{ CON ANGOLO } \beta/2}$



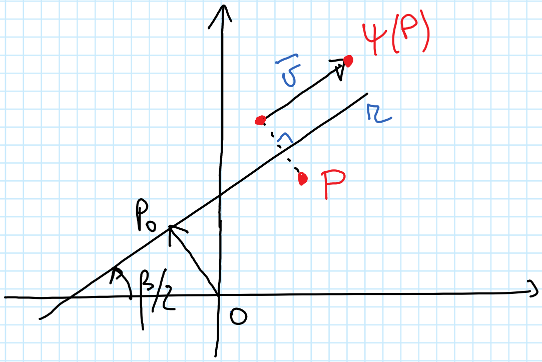
$$\underline{\underline{\psi}} = t_{P_0} \circ B_\beta \circ t_{P_0}^{-1} = t_{P_0} \circ B_\beta \circ t_{-P_0} = t_{P_0} \circ t_{B_\beta(-P_0)} \circ B_\beta =$$

$$= t \circ B_\beta = t \circ B$$



$$= t_{P_0 + \underbrace{B_\beta(-P_0)}_{= P_0}} \circ B_\beta = t_{2P_0} \circ B_\beta$$

GLISSO-RIFLESSIONE LUNGO UNA RETTA ARBITRARIA



$$\psi = \left(t_{\bar{v}} \circ t_{2P_0}\right) \circ B_\beta = t_{2P_0 + \bar{v}} \circ B_\beta$$

con $\overline{OP_0} \perp \bar{v}$ cioè $\overline{OP_0} \cdot \bar{v} = 0$

DIMOSTREREMO ORA CHE QUESTE TRE TIPOLOGIE DI ψ E LE PURE TRASLAZIONI COSTITUISCONO TUTTE LE POSSIBILI ISOMETRIE DEL PIANO. IN ALTRE PAROLE, NON VE NE SONO ALTRE.

Possiamo suddividere le isometrie del piano, cioè gli elementi del gruppo E_2, in due classi complementari:

- le isometrie DIRETTE, cioè quelle che si lasciano scrivere nella forma $t_{\bar{v}} \circ A_\alpha$ (cioè ROTAZIONE seguita da TRASLAZIONE)
- le isometrie INVERSE, cioè quelle che si lasciano scrivere nella forma $t_{\bar{v}} \circ B_\beta$ (cioè RIFLESSIONE seguita da TRASLAZIONE).

IL SEGUENTE RISULTATO CI CONSENTE FINALMENTE DI CLASSIFICARE TUTTE LE ISOMETRIE E_2 DEL PIANO:

TEOREMA:

a) Ogni <u>isometria diretta</u> $\psi = t_{\bar{v}} \circ A_\alpha$ è una <u>pura traslazione</u> oppure una <u>rotazione attorno ad un opportuno punto</u> P_0.

b) Ogni <u>isometria inversa</u> $\psi = t_{\bar{v}} \circ B_\beta$ è una <u>riflessione</u> oppure una <u>glisso-riflessione</u> <u>lungo una opportuna retta</u>.

<u>dim</u>: (a) Sia $\psi = t_{\bar{v}} \circ A_\alpha$, con $A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

Se $\alpha = 0$ allora $A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = id_{\mathbb{E}^2}$ e quindi ψ è una pura traslazione. Se invece $\alpha \neq 0$ consideriamo la trasformazione

$id_{\mathbb{E}^2} - A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & 1-\cos\alpha \end{pmatrix} : \mathbb{E}^2 \longrightarrow \mathbb{E}^2$.

Tale trasformazione è un elemento di GL_2, infatti è lineare ed invertibile poiché ha determinante uguale a

$(1-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha = 1 - 2\cos\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 2(1-\cos\alpha) > 0$,

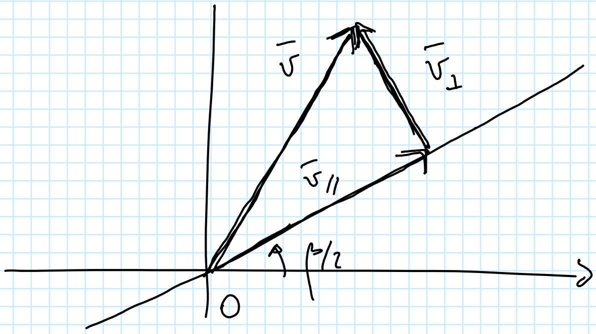
dal momento che stiamo assumendo che $\alpha \neq 0$.

Quindi esiste $P_0 \in \mathbb{E}^2$ tale che $(id_{\mathbb{E}^2} - A_\alpha)(P_0) = \bar{v}$ cioè $P_0 - A_\alpha P_0 = \bar{v}$, ma allora

$$\psi = t_{\bar{v}} \circ A_\alpha = t_{P_0 - A_\alpha P_0} \circ A_\alpha$$

che dimostra che ψ è la rotazione attorno al punto P_0.

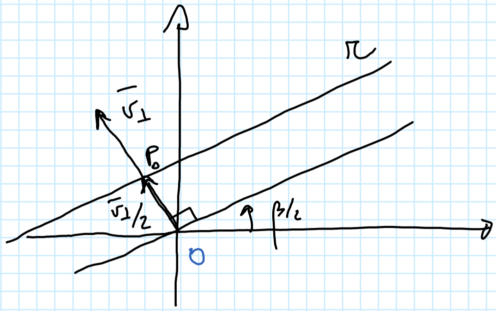
(b) Sia ora $\psi = t_{\bar{v}} \circ B_\beta$. Possiamo scomporre il vettore $\bar{v}$ nella somma $\bar{v} = \bar{v}_\perp + \bar{v}_{/\!/}$ della componente di $\bar{v}$ perpendicolare e la componente parallela alla retta per l'origine con angolo $\beta/2$:



Se $\bar{v}_{//} = \bar{0}$ allora $\bar{v} = \bar{v}_\perp$ e $\psi = t_{\bar{v}} \circ B_\beta = t_{2\frac{\bar{v}_\perp}{2}} \circ B_\beta$

che dimostra che ψ è la riflessione lungo la retta inclinata di un angolo di $\beta/2$ e che passa per il punto

$P_0 = \bar{v}_\perp/2$



Altrimenti se $\bar{v}_{//} \neq 0$ allora abbiamo che, posto $P_0 = \frac{1}{2}\bar{v}_\perp$,

$$\psi = t_{\bar{v}} \circ B_\beta = t_{\bar{v}_{//} + \bar{v}_\perp} \circ B_\beta = t_{\bar{v}_{//} + 2P_0} \circ B_\beta \qquad \text{con } P_0 \cdot \bar{v}_{//} = 0$$

che dimostra che ψ è una glisso-riflessione su r. #