GRUPPI
& MATRICI

Come avrete capito dalla presentazione generale, le TRASFORMAZIONI DI SIMMETRIA sono uno strumento utilissimo per cogliere le proprietà dei sistemi materiali: ci permettono quindi di analizzare tutto ciò che ci circonda!

Con la matematica è possibile classificare in modo preciso e ordinato queste trasformazioni.

COSA SONO?

Una trasformazione di simmetria è una trasformazione che, applicata ad un oggetto, ne restituisce uno indistinguibile rispetto a quello di partenza

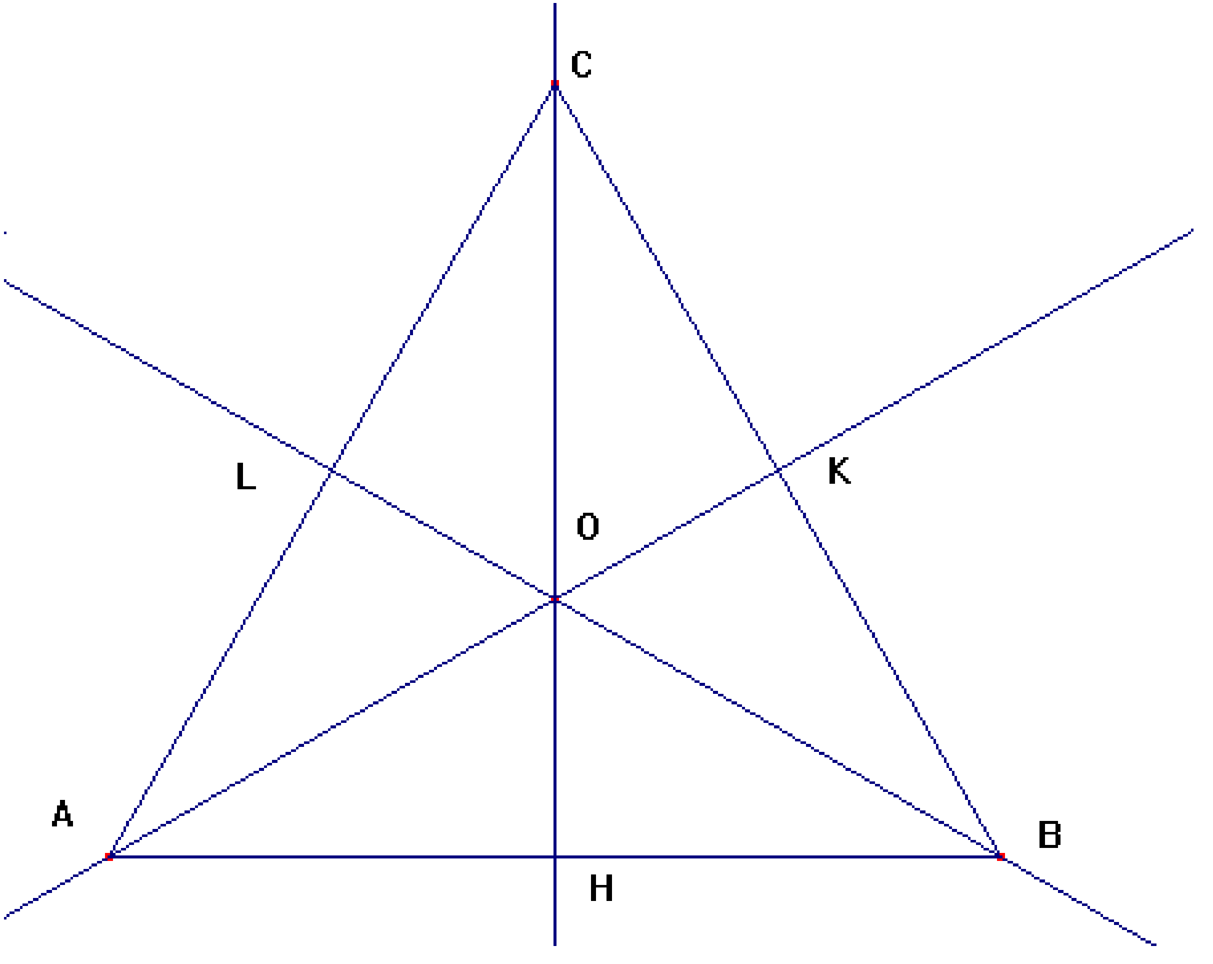
PER CAPIRE, VEDIAMO IL SEGUENTE ESEMPIO:

disegniamo un quadrato su un cartoncino e, su di un lato, ne identifichiamo i vertici con A,B,C,D. Ora lo giriamo dal lato “bianco” e lo ruotiamo su se stesso tenendone fermo il baricentro, finché non riportiamo il quadrato nella posizione iniziale.

Se non guardiamo il lato in cui abbiamo dato un nome ai vertici, non siamo in grado di dire se il quadrato sia nella stessa posizione di quando abbiamo iniziato a ruotarlo o no:

il quadrato ruotato è **indistinguibile** rispetto a quello iniziale, ma non necessariamente **identico**.

CERCHIAMO ORA LE TRASFORMAZIONI DI SIMMETRIA DI UN TRIANGOLO EQUILATERO:

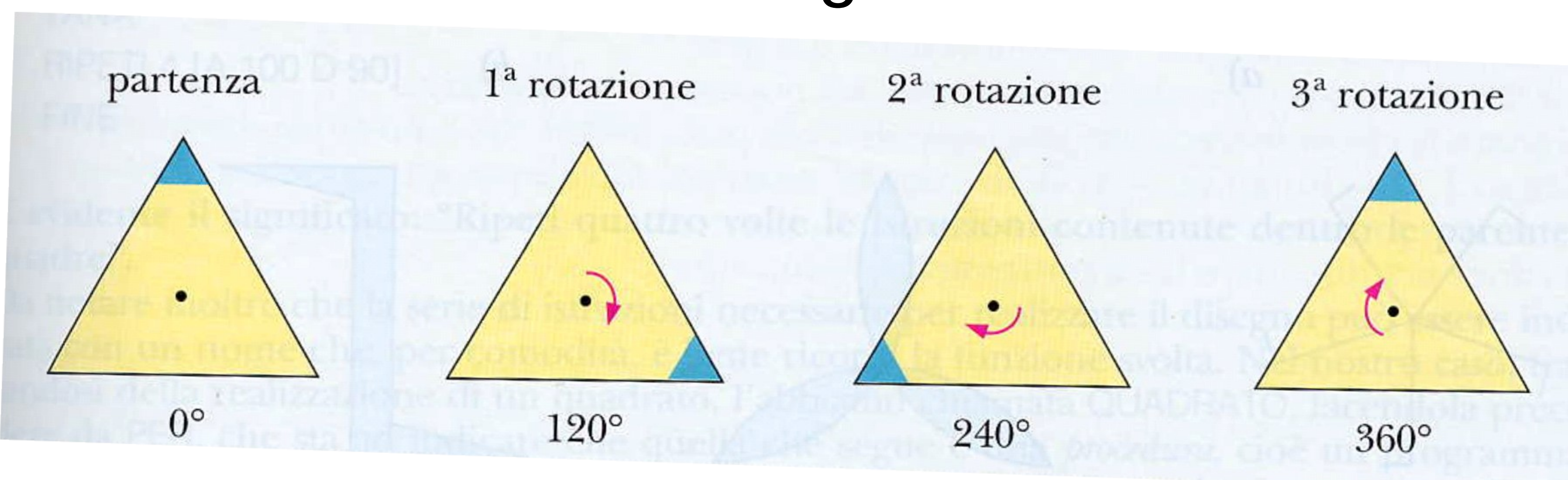


lasciandoci ispirare dalla spiegazione appena vista, proviamo a ruotare in senso orario il triangolo equilatero su se stesso tenendone fermo il baricentro O, di un angolo tale da portare ogni vertice nel successivo, ovvero $2\pi/3$ (per trovare l'angolo, basta osservare che è proprio quello che divide in 3 parti equivalenti la circonferenza circoscritta al triangolo).

OTTENIAMO UN TRIANGOLO INDISTINGUIBILE RISPETTO A QUELLO DI PARTENZA!

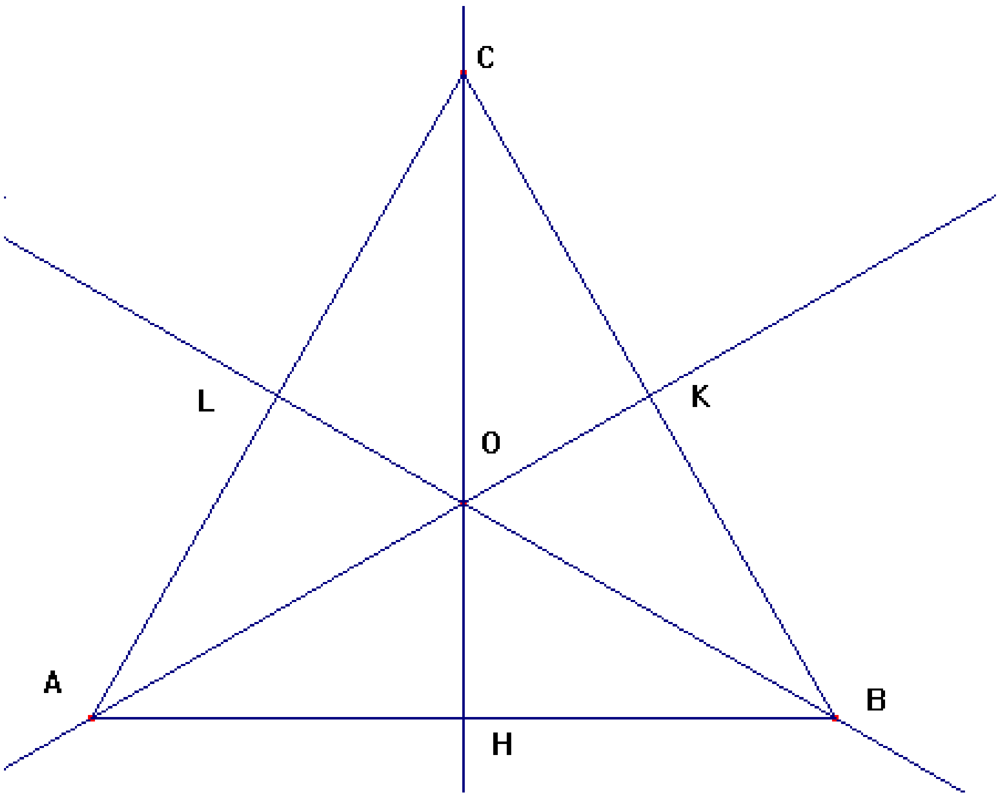
Ruotiamolo ora in senso orario di un angolo di $4\pi/3$: in questo modo portiamo ogni vertice in quello dopo ancora!

Se invece lo lasciamo fermo, otteniamo lo stesso triangolo.



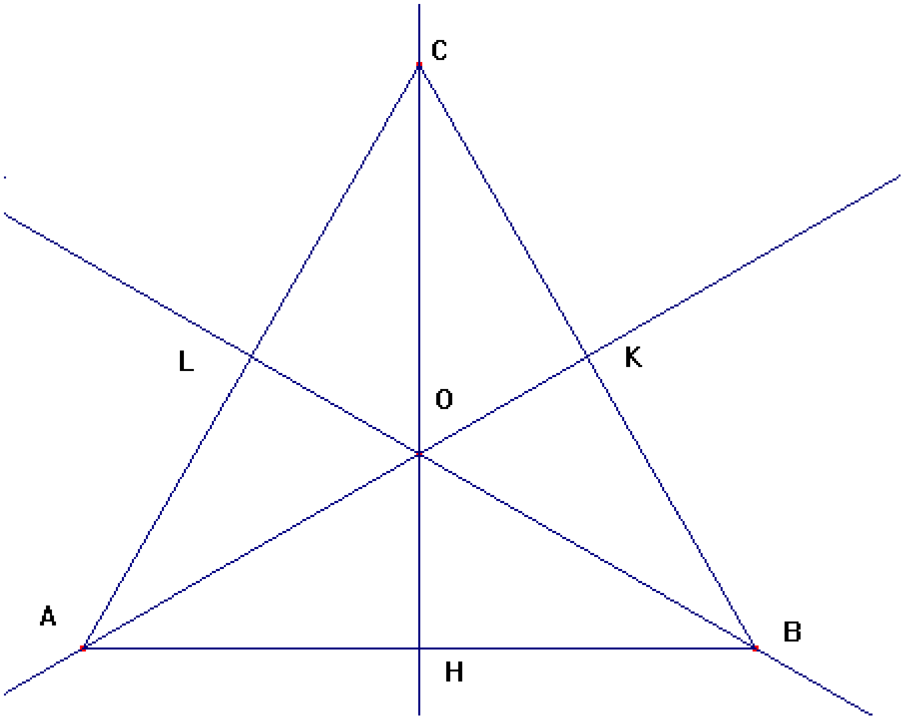
Ora, cambiamo tipo di trasformazione.

Riflettiamo il triangolo equilatero rispetto a una retta passante per un vertice e il punto medio del lato a esso opposto (chiameremo ognuna di queste rette **ASSE DI SIMMETRIA**): otteniamo cosi altre 3 trasformazioni che, applicate al triangolo dato, ne restituiscono uno indistinguibile da questo.



Abbiamo trovato 6 trasformazioni di simmetria:

1. La rotazione di 0π attorno a O
2. La rotazione di 2π/3 attorno a O
3. La rotazione di 4π/3 attorno a O
4. La riflessione rispetto all’asse L
5. La riflessione rispetto all’asse K
6. La riflessione rispetto all’asse H



COME SI “COMBINANO” TRA LORO,cioè: cosa succede applicando successivamente due trasformazioni di simmetria allo stesso oggetto?

NOTAZIONE: Se prendiamo due trasformazioni tra quelle appena viste u,v, indichiamo con uv ciò che otteniamo applicando prima la trasformazione v e poi u.

Nel nostro caso, in qualsiasi modo scegliamo u e v, notiamo che la combinazione di u e v agisce come un’unica trasformazione che rende il triangolo indistinguibile e, in particolare, che:

1. Il loro effetto sul triangolo è equivalente ad applicare una sola delle trasformazione delle 6 elencate;
2. Se indichiamo con e la rotazione di 0π, osserviamo che $eu = u = ue$;
3. Per ogni trasformazione u, ce n’è un’altra v per cui uv mi restituisce il triangolo di partenza;
4. Se prendiamo tre trasformazioni u,v,w, vediamo che $(uv)\,w = u\,(vw)$!
5. $uv \neq vu$ in generale.

CERCHIAMO DI FORMALIZZARE MATEMATICAMENTE QUANTO ABBIAMO APPENA VISTO:

Se X è un insieme e f : $S \rightarrow S$ (con X contenuto in S) una funzione biunivoca che agisce sugli elementi di X scambiandone l'ordine, allora f è detta **permutazione** dell'insieme X.

Nel nostro caso, X è l'insieme dei punti del triangolo e f è la trasformazione di simmetria che sposta i punti del triangolo in punti del triangolo.

Notiamo dunque che una **trasformazione di simmetria** deve essere una funzione tale per cui X e f(X) coincidano come insiemi di punti ma non punto per punto: visti come oggetti, X e f(X) sono dunque indistinguibili ma non identici!

Inoltre, una **trasformazione di simmetria** deve agire su X semplicemente “muovendone i punti”, senza alterarne le distanze: in altre parole, una trasformazione di simmetria deve essere in particolare una **isometria**.

Quindi applicare due trasformazioni di simmetria corrisponde a comporre due isometrie, ovvero due funzioni.

Ricordiamo che se X,Y, Z sono tre insiemi qualsiasi e f,g sono due funzioni del tipo $f : X \rightarrow \mathbf{Y}$ e $g : \mathbf{Y} \rightarrow Z$ (cioè il codominio di f coincide con il dominio di g), la **composizione** $\mathbf{g \circ f}$ è una funzione $\mathbf{g \circ f} : X \rightarrow Z$ tale che
$\mathbf{g \circ f}(x) = g(f(x)) = g(y) = z$ per ogni $x \in X$, $y \in Y$ tale che $y = f(x)$ e $z \in Z$ tale che $g(y) = z$.

ATTENZIONE! $\mathbf{g \circ f \neq f \circ g}$**!**
Esempio: $f(x) = x+1$ e $g(x) = x^2$

Le trasformazioni di simmetria di un oggetto, associate tra loro tramite la composizione di funzioni, formano un GRUPPO.

Un **GRUPPO** è una **STRUTTURA ALGEBRICA** del tipo **(G,*)** dove G è un insieme non vuoto e * un'operazione definita sugli elementi di G che soddisfa le seguenti proprietà (dette **ASSIOMI DI GRUPPO**) :

1. CHIUSURA
2. ASSOCIATIVITÀ
3. ESISTENZA DELL'ELEMENTO NEUTRO
4. ESISTENZA DELL'INVERSO

In matematica, il termine **STRUTTURA ALGEBRICA (S,*)** indica un insieme S, chiamato insieme sostegno (della struttura), e una o più operazioni (indicate con *,+,-, #, $\circ$, ...) definite sugli elementi di quell'insieme S.

(Trasformazioni di simmetria che rendono indistinguibile un triangolo equilatero, composizione di funzioni) è una struttura algebrica.

CHIUSURA

Questa proprietà assicura che se prendiamo 2 elementi qualunque (che chiamiamo a,b) dell'insieme G e applichiamo loro l'operazione definita su G, otterremo un nuovo elemento a*b che sarà

- Definito
- Ancora un elemento di G

Abbiamo visto che componendo tra loro le trasformazioni di simmetria del triangolo, otteniamo ancora trasformazioni di simmetria del triangolo

ASSOCIATIVITÀ

Un'operazione * definita su G è associativa se, presi comunque 3 elementi di G che possiamo denominare a,b,c, si ha:

$$(a*b) * c = a * (b*c) = a * b * c$$

Questo vale perché sappiamo che la composizione di funzioni è un'operazione che gode della proprietà associativa.

ATTENZIONE!

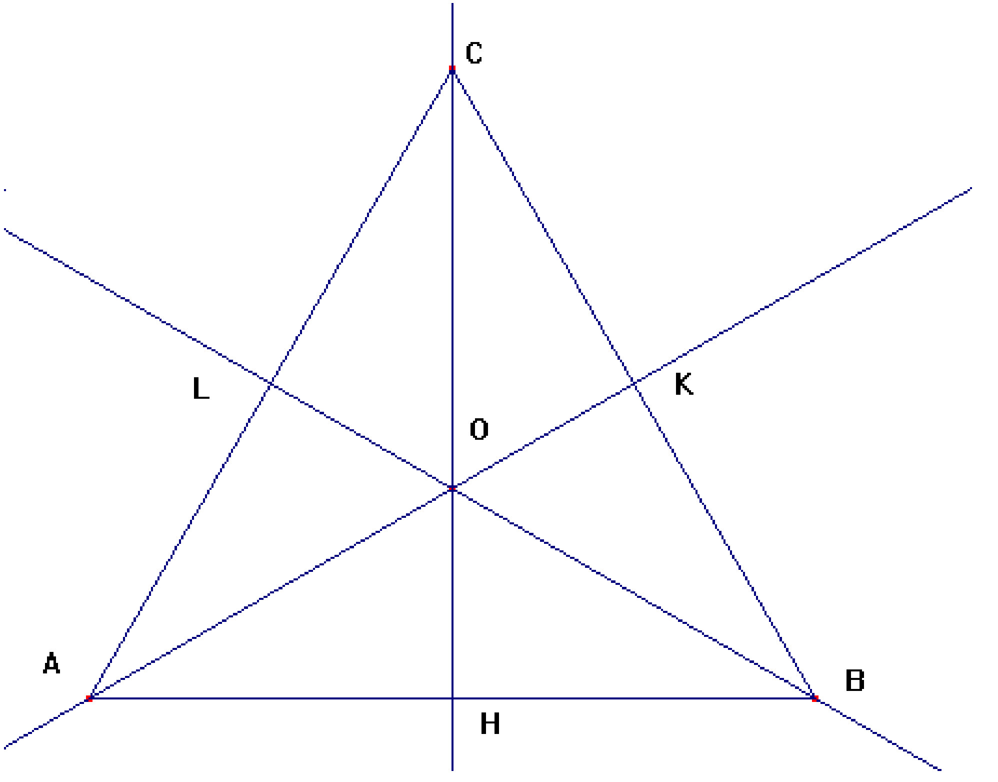
L'operazione generica * di un gruppo (G,*) viene chiamata **moltiplicazione** (anche se è definita in altro modo) e indicata come tale.
In pratica, se $g \in G$, si avrà:

- $g^1 = g$;
- $g^2 = g*g$
-
-
- $g^n = g*g* \dots *g$ (n volte).

Questa regola di notazione si dice **NOTAZIONE MOLTIPLICATIVA.**

Se chiamiamo:

- e la rotazione di 0π attorno a O
- r la rotazione di $2\pi/3$ attorno a O
- s la riflessione rispetto all'asse L,



avremo che:

- $r^2=r\circ r$ coincide con la rotazione di $4\pi/3$ attorno a O
- $rs = r\circ s$ coincide con la riflessione rispetto all'asse H
- $r^2s = r\circ r\circ s$ coincide con la riflessione rispetto all'asse K

Scriviamo una tabella nelle cui righe e colonne inseriamo le 6 trasformazioni: all’incrocio tra la riga della trasformazione u e la colonna della trasformazione v avremo la trasformazione uv

$\circ$	e	r	r^2	s	rs	r^2s
e	e	r	r^2	s	rs	r^2s
r	r	r^2	e	rs	r^2s	s
r^2	r^2	e	r	r^2s	s	rs
s	s	r^2s	rs	e	r^2	r
rs	rs	s	r^2s	r	e	r^2
r^2s	r^2s	rs	s	r^2	r	e

ESISTENZA DELL'ELEMENTO NEUTRO

Esiste un elemento **e** di G tale che per ogni altro elemento a di G, si ha: $a * e = a = e * a$, e viene detto **elemento neutro e di G**.

Per ogni $a \in G$, si ha che $a^0 = e$.

Abbiamo visto dalla tabella moltiplicativa che ogni volta che componiamo una trasformazione con e, otteniamo ancora la trasformazione di partenza (e vale anche componendole in ordine inverso)

ESISTENZA DELL’INVERSO

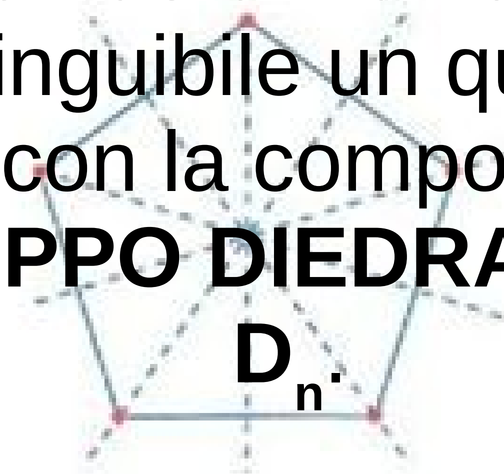
Per ogni elemento a di G, esiste un altro elemento b di G tale che a * b = **e** = b * a.

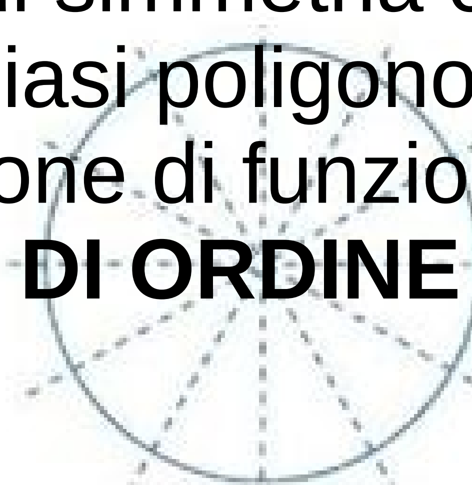
Tale elemento si indica con a^{-1} e si dice **inverso di a**

Abbiamo visto dalla tabella moltiplicativa che in ogni riga e in ogni colonna compare l’elemento neutro **e** una sola volta, proprio ad indicare che ogni trasformazione ha un’unica inversa.

Le trasformazioni di simmetria che rendono indistinguibile un triangolo equilatero, con l’operazione di composizione tra funzioni, formano un gruppo, detto **GRUPPO DIEDRALE DI ORDINE 3**, che si indica con $\mathbf{D_3}$.

Più in generale: le trasformazioni di simmetria che rendono indistinguibile un qualsiasi poligono regolare di n lati con la composizione di funzioni, si otterrà il **GRUPPO DIEDRALE DI ORDINE n** $\mathbf{D_n}$.





Notiamo che sono le **isometrie piane** (cioè isometrie che agiscono su sottoinsiemi del piano cartesiano) a formare un gruppo!

SIETE SICURI CHE SIA UN CONCETTO “NUOVO”?

Vediamo se (Z,+) verifica gli assiomi gruppali:

- CHIUSURA: la somma di numeri interi restituisce un numero intero;
- ASSOCIATIVITÀ: sappiamo che la somma tra interi è un’operazione associativa;
- ESISTENZA DELL’ELEMENTO NEUTRO: provate un po’ a sommare qualsiasi intero a 0;
- ESISTENZA DELL’INVERSO: l’inverso di ogni intero è il suo opposto.

Quindi (Z,+) è un gruppo!
Inoltre, sappiamo che l’addizione tra numeri interi gode della proprietà commutativa, a differenza della composizione tra funzioni.

DEFINIZIONE: Un **gruppo** (G,*) in cui l’operazione * è commutativa (ovvero per ogni coppia di elementi a,b ϵ G si ha che a*b = b*a) si dice **commutativo** o **abeliano**.

- (Z,+) è un gruppo, così come lo sono (Q,+), (R,+), ma non (N,+) (il problema è l'inverso).

- Del resto, anche (Q-{0}, ·), (R-{0}, ·) sono gruppi (devo togliere loro lo 0 perché esso non ha inverso, quindi non sarebbe più vero che ogni elemento ha un inverso) .

VERIFICATELO, NON FIDATEVI!

Anche molti degli insiemi numerici con cui abbiamo sempre lavorato acquistano la struttura di gruppo se associati a certe operazioni!

MA A COSA SERVE QUESTO CONCETTO DI GRUPPO?

La definizione di gruppo è una generalizzazione che ci permette di dedurre molte proprietà di un insieme solo verificando che soddisfi gli assiomi di gruppo, cioè:

tutte le proprietà che si possono ricavare solo sfruttando la definizione di gruppo non dipendono dalla struttura di un particolare insieme, ma dal fatto che verifica le richieste gruppali, varranno anche per qualsiasi altro insieme che si dimostra essere gruppo.

ESEMPIO: UNICITÀ DELL'ELEMENTO NEUTRO

In ogni gruppo, esiste ed è unico l'elemento neutro.

DIMOSTRAZIONE

Sia (G,*) un gruppo qualsiasi.

Per la definizione di gruppo, l'elemento neutro esiste. Per dimostrare che è unico, mostriamo che se **e**,f ϵ G sono due elementi neutri per (G,*), allora **e**=f. Infatti:

e = **e** * f = f

e è elemento neutro

f è elemento neutro

e = f * **e** = f

e è elemento neutro

f è elemento neutro

□

ESEMPIO: UNICITÀ DELL'INVERSO

In ogni gruppo, esiste ed è unico l'inverso di ogni suo elemento.

DIMOSTRAZIONE

Sia $(G,*)$ un gruppo qualsiasi, $\mathbf{e}$ il suo elemento neutro, g un suo elemento qualunque.

Per la definizione di gruppo, l'inverso di g esiste. Per dimostrare che è unico, mostriamo che se $k,h \in G$ sono due inversi di g in $(G,*)$, allora $h=k$. Infatti:

$$g*h = \mathbf{e} = g*k \qquad\qquad h*g = \mathbf{e} = k*g$$

da cui $h = h*\mathbf{e} = h*(g*k) = (h*g)*k = \mathbf{e}*k = k$.

In particolare, si ha: $h=k=g^{-1}$. □

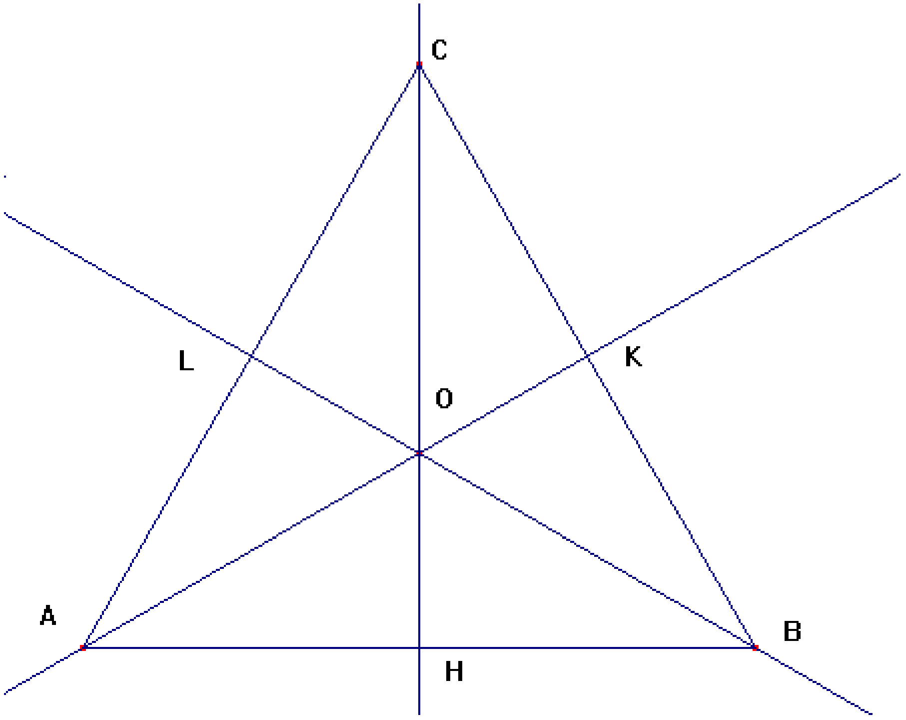
Quindi, indipendentemente da quale insieme e quale operazione diano luogo a un particolare gruppo, sappiamo che esso avrà un unico elemento neutro e che ogni suo elemento avrà un unico inverso!

Si faccia attenzione che esistono invece proprietà che sono tali solo per quel particolare gruppo, che dipendono da caratteristiche speciali dell’insieme o dell’operazione tramite cui è definito, e che lo contraddistinguono dagli altri (lo “caratterizzano”).

ESEMPIO: GRUPPO DIEDRALE D_3

Riprendiamo $D_3=\{e, r, r^2, s, rs, r^2s\}$, dove:

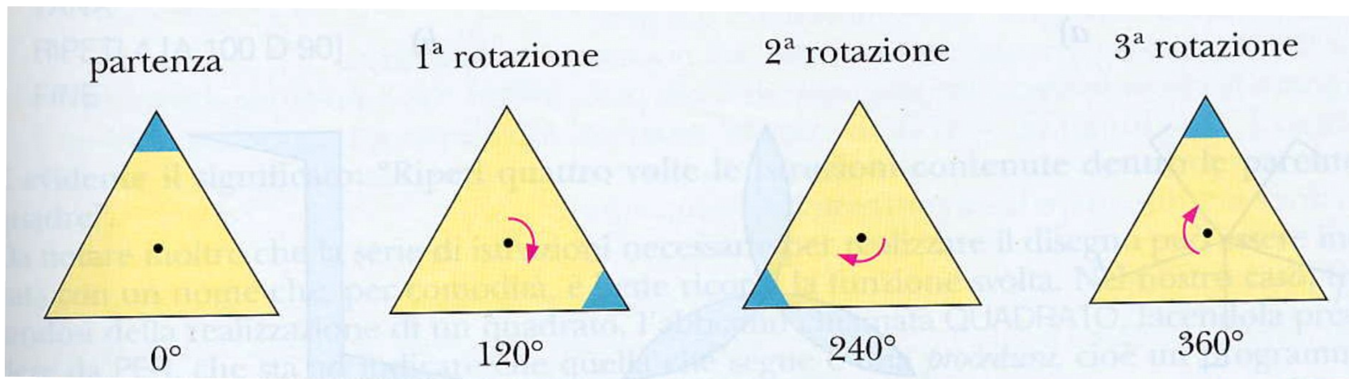
- e è la rotazione nulla (ovvero l'elemento neutro del gruppo);
- r è la rotazione di $2\pi/3$ attorno a O;
- s è la riflessione rispetto all'asse L.



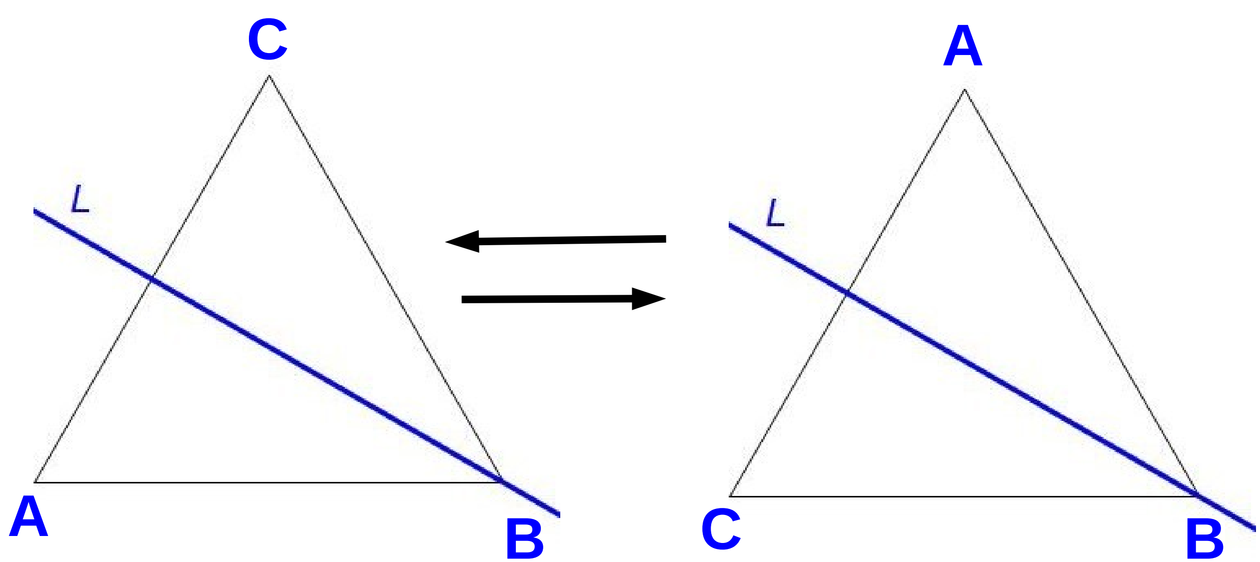
VEDIAMONE ALCUNE PROPRIETÀ:

1. Notiamo che:

- $r^3 = e$



- $s^2 = e$



DEFINIZIONE: Sia (G,*) un gruppo, g un elemento qualsiasi di G. Il minimo intero n>0 tale che g^n = **e**, se esiste, si dice **ordine dell'elemento g** (o che **g ha ordine n**).
Si definisce invece come **ordine del gruppo |G|** (sottintendendo, se è chiaro dal contesto, l'operazione) il numero dei suoi elementi se è finito, +∞ (:= "più infinito") se invece il gruppo contiene infiniti elementi.

ESEMPI:
- $| D_3 | = 6$;
- $| Z | = +\infty$

2. Tutti gli elementi di D_3 si ottengono componendo, in particolari modi, r e s, che si dicono quindi suoi **generatori**.

DEFINIZIONE: Sia (G,*) un gruppo, e X un sottoinsieme di G. Se ogni elemento di G si può ottenere associando tra loro gli elementi di X con l'operazione del gruppo **,** allora X è detto **insieme dei generatori di (G,*)**, e i suoi elementi **generatori del gruppo**.

In particolare, se il gruppo è generato da un solo elemento $w \in G$, si dice **ciclico** e si scrive

G = < w > .

3. $s\ r\ s = r^{-1} = r^2$

Ovvero l’applicazione della rotazione di $2\pi/3$ attorno a O tra due riflessioni rispetto a un asse di simmetria mi dà la rotazione di $4\pi/3$, ovvero l’elemento inverso di quella che applico

.. Sto semplicemente dicendo che operare una riflessione rispetto a un asse di simmetria, ruotare di $2\pi/3$ e riflettere ancora rispetto allo stesso asse, mi fa vedere lo stesso triangolo equilatero che otterrei prendendo il triangolo di partenza e ruotandolo di $4\pi/3$!

4. Prendiamo R={e, r, r^2} sottoinsieme di D_3. Guardando la sua tabella moltiplicativa, notiamo che è un gruppo con la composizione tra funzioni $\circ$, essendo :

a) CHIUSO;

b) ASSOCIATIVO;

c) CONTIENE L'ELEMENTO NEUTRO DEL GRUPPO;

d) OGNI ELEMENTO HA INVERSO CONTENUTO IN R.

$\circ$	e	r	r^2
e	e	r	r^2
r	r	r^2	e
r^2	r^2	e	r

Inoltre, ha come unico generatore r, quindi è ciclico.

DEFINIZIONE: Sia (G,*) un gruppo, H un sottoinsieme di G che sia un gruppo per la stessa operazione di G (e per questa verifica basta mostrare che H è chiuso per * e che contiene l'elemento neutro di (G,*)). Allora (H,*) si dice **sottogruppo** di (G,*) e si indica **H≤G**.

Notiamo che le trasformazioni di simmetria di una particolare figura piana sono un sottogruppo del gruppo delle isometrie piane.

E SE STUDIASSIMO D_n (con n>3)?

(D_n, ◦) è un gruppo e, se stabiliamo che :

- e è la rotazione nulla (ovvero l'elemento neutro del gruppo);
- r è la rotazione di 2π/n attorno a O;
- s è la riflessione rispetto a un asse di simmetria che giace sullo stesso piano del poligono;

abbiamo:

$$\mathbf{D_n = \{ e, r, r^2, . . , r^{n-1}, s, rs, r^2 s, \dots , r^{n-1}s\}}$$

QUALCHE PROPRIETÀ DI D_n (n>3):

- $|D_n| = 2n$, ovvero D_n contiene 2n elementi, e in particolare questi sono:
  - l'identità, che si scrive come r^0 oppure r^n;
  - n-1 rotazioni attorno al baricentro O del poligono della forma r^α con $0 < \alpha \leq n-1$, di angolo $2\alpha\pi/n$
  - n riflessioni, ognuna attorno a un asse di simmetria che giace sullo stesso piano del poligono, della forma $r^\alpha s$ con $0 \leq \alpha \leq n-1$

ogni elemento si scrive r^α oppure $r^\alpha s$ con $0 \leq \alpha \leq n-1$

$$\mathbf{D_n = < r , s >}$$

- Infatti si ha:

  - $r^{\alpha} \cdot r^{\beta} = r^{k}$
  - $r^{\alpha} \cdot (r^{\beta} \cdot s) = r^{k} s$

Come si trova k?

- Si fa la divisione con resto $(\alpha + \beta) : n$;
- Il risultato sarà dato da un certo quoziente e da un resto; tale resto è proprio k.

  - $(r^{\alpha} \cdot s) \cdot r^{\beta} = r^{j} s$
  - $(r^{\alpha} \cdot s) \cdot (r^{\beta} \cdot s) = r^{j}$

Come si trova j?

- Si fa la divisione con resto $(\alpha + (n - \beta)) : n$;
- Il risultato sarà dato da un certo quoziente e da un resto; tale resto è proprio j.

- Soffermiamoci un attimo sulla relazione $r^{\alpha} \cdot r^{\beta} = r^{k}$

$$\Downarrow$$

($\{ r^{b} \}$ con $0 \leq b \leq n-1$, $\circ$) è un sottogruppo ciclico di (D_n, $\circ$) , generato da r.

- $r^{n-1} = r^{-1}$
- $s\ r\ s = r^{-1}$
- $r^{n} = e$
- $s^{2} = e$

provate a verificarlo, aiutandovi con i disegni e con l'immaginazione!

...Forse la parte più difficile nello studiare un gruppo diedrale D_n è la stesura della sua tabella moltiplicativa…

Vorremmo essere capaci di studiarlo senza usare l’immaginazione, ma facendo “conti”!

ESISTE UN MODO “VELOCE” CHE AIUTI A SCRIVERE LA TAVOLA MOLTIPLICATIVA DI UN GRUPPO DIEDRALE D_n, SENZA DOVER RUOTARE E RIBALTARE POLIGONI A MENTE?

SÌ! Basta scrivere le trasformazioni (cioè gli elementi) del gruppo diedrale D_n sotto forma di **MATRICI!**

Una **MATRICE** è una “tabella di numeri”, con un certo numero di righe e un altro di colonne (i numeri di righe e colonne possono essere uguali o diversi), che serve a rappresentare un particolare tipo di funzioni.

Noi useremo le MATRICI per rappresentare le trasformazioni di simmetria del gruppo diedrale $D_{n.}$

PER CAPIRE MEGLIO, SCRIVIAMO GLI ELEMENTI DI D_3 SOTTO FORMA DI MATRICI:

Stiamo lavorando con **D_3** : inizialmente useremo matrici con 3 righe e 3 colonne (dette **matrici 3x3**), ovvero oggetti del tipo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Con le matrici possiamo fare delle operazioni:

- **SOMMA**: si fa la somma componente per componente

$$\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{5} \\ \mathbf{4} & \mathbf{7} & \mathbf{1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{6} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{5} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{8} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{8} \\ \mathbf{5} & \mathbf{8} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

- **PRODOTTO MATRICE PER UN NUMERO REALE:**

Se voglio moltiplicare una matrice per un numero basta moltiplicare ogni elemento della matrice per quel numero

$$-4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -24 & -4 \\ 0 & -20 & -12 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- **PRODOTTO MATRICE PER VETTORE**:

➢ Si prende la riga 1 della matrice; si moltiplica il primo elemento della riga per il primo del vettore, e lo si somma al prodotto del secondo elemento della riga col secondo del vettore, e lo si somma infine al prodotto del terzo elemento della riga per il terzo del vettore: il risultato è la prima componente del vettore risultato.

$$3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 2$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ \\ \end{pmatrix}$$

- Si prende la riga h della matrice; si moltiplica il primo elemento della riga per il primo del vettore, e lo si somma al prodotto del secondo elemento della riga col secondo del vettore, e lo si somma infine al prodotto del terzo elemento della riga per il terzo del vettore: il risultato è la componente h-esima del vettore risultato.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \to 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 \\ \to 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 5 \cdot 2 \\ \to 4 \cdot 1 + 7 \cdot 0 + 1 \cdot 2 \end{array}$$

- **PRODOTTO TRA MATRICI**:
  - Si prende la riga 1 della prima matrice e la colonna 1 della seconda matrice; si moltiplica il primo elemento della riga per il primo della colonna, e lo si somma al prodotto del secondo elemento della riga col secondo della colonna, e lo si somma infine al prodotto del terzo elemento della riga per il terzo della colonna: il risultato è il primo elemento, all'incrocio tra riga 1 e colonna 1, della matrice risultato.

$$3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

- Si prende la riga 1 della prima matrice e la colonna 2 della seconda matrice; si moltiplica il primo elemento della riga per il primo della colonna, e lo si somma al prodotto del secondo elemento della riga col secondo della colonna, e lo si somma infine al prodotto del terzo elemento della riga per il terzo della colonna: il risultato è il l’elemento all’incrocio tra riga 1 e colonna 2 della matrice risultato.

$$3 \cdot 6 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 1$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 29 & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

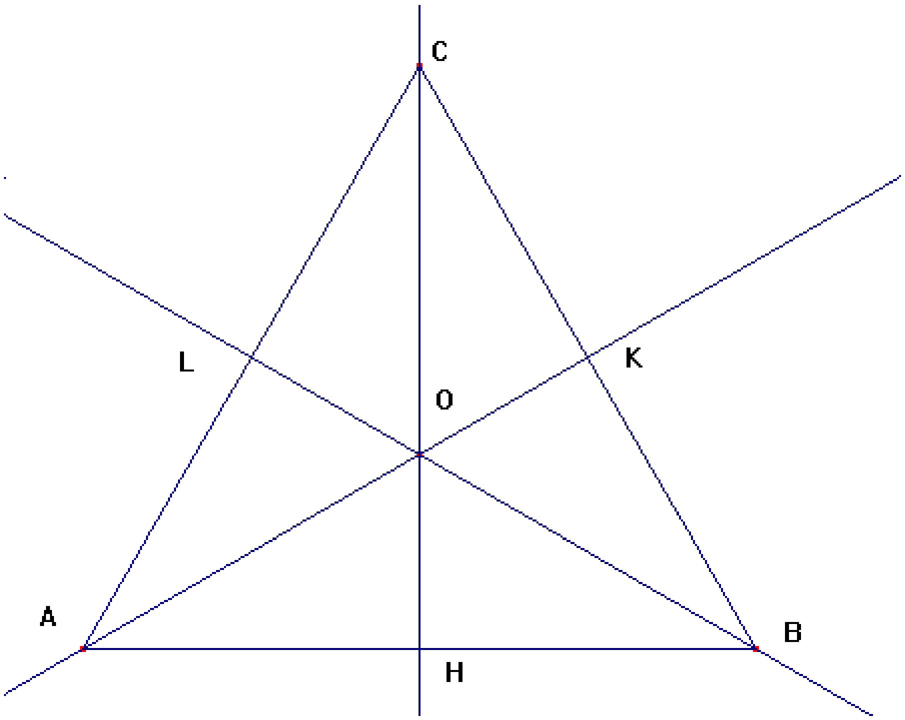
- In generale, si prende la riga k della prima matrice e la colonna j della seconda matrice; si moltiplica il primo elemento della riga per il primo della colonna, e lo si somma al prodotto del secondo elemento della riga col secondo della colonna, e lo si somma infine al prodotto del terzo elemento della riga per il terzo della colonna: il risultato è il l'elemento all'incrocio tra riga k e colonna j della matrice risultato.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 29 & 6 \\ 6 & 11 & 1 \\ 5 & 60 & 24 \end{pmatrix}$$

Ricordiamo che gli elementi di D_3 sono :

$D_3=\{e, r, r^2, s, rs, r^2s\}$, dove:

- e è la rotazione nulla (ovvero l'elemento neutro del gruppo);
- r è la rotazione di $2\pi/3$ attorno a O;
- s è la riflessione rispetto all'asse L.



- Chiamiamo inoltre A,B,C i vertici del triangolo equilatero.

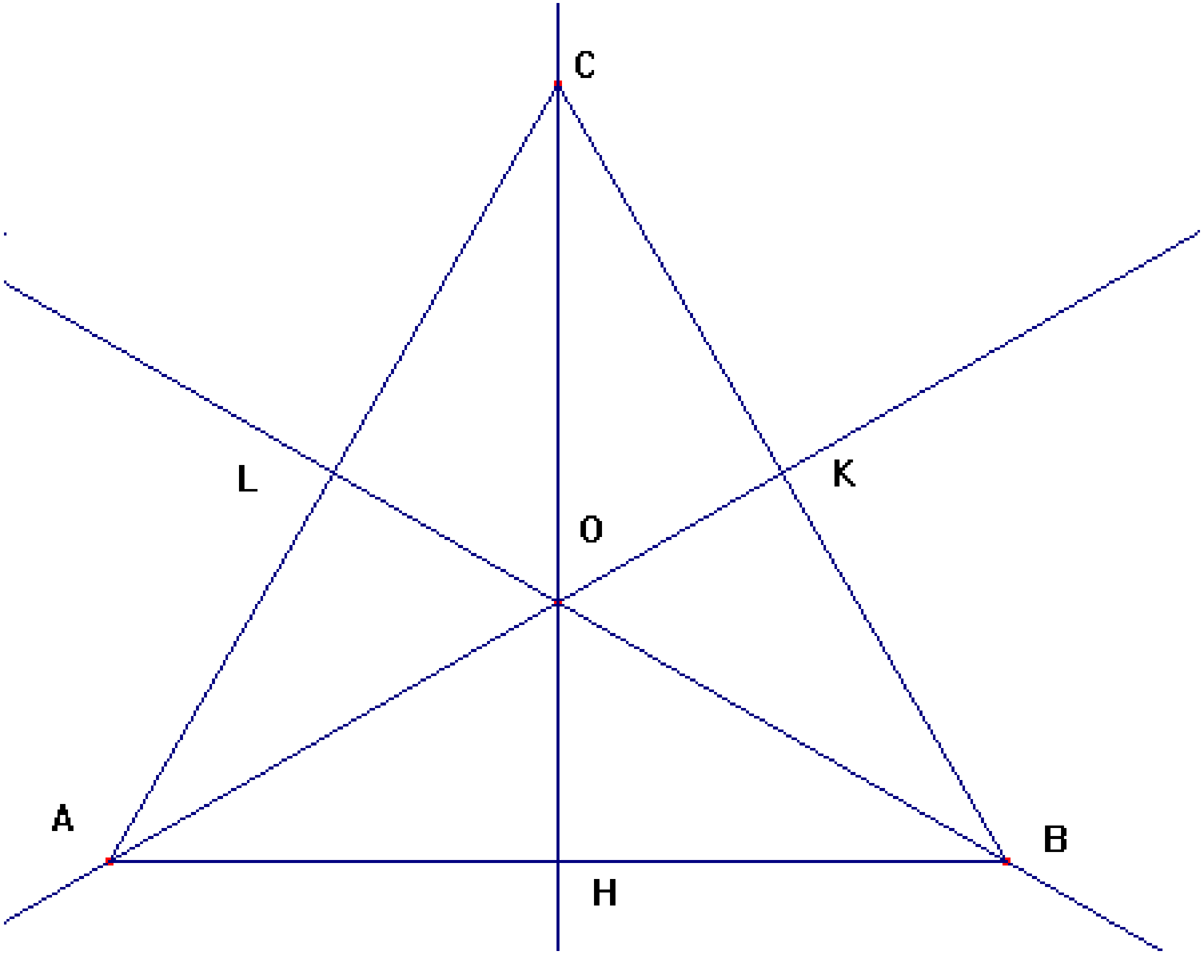
Pensiamo ai 3 vertici del triangolo equilatero come alle tre componenti di un vettore tridimensionale, cioè

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$$

Operare una trasformazione di simmetria sul triangolo può corrispondere ad esempio a applicare la matrice corrispondente al vettore dei vertici (quindi al prodotto matrice per vettore), e vedere in quale altro vertice viene spostato ognuno di essi!

e è la trasformazione identica, che non trasforma nulla, lasciando così ogni oggetto su cui viene applicata in se stesso, cioè:

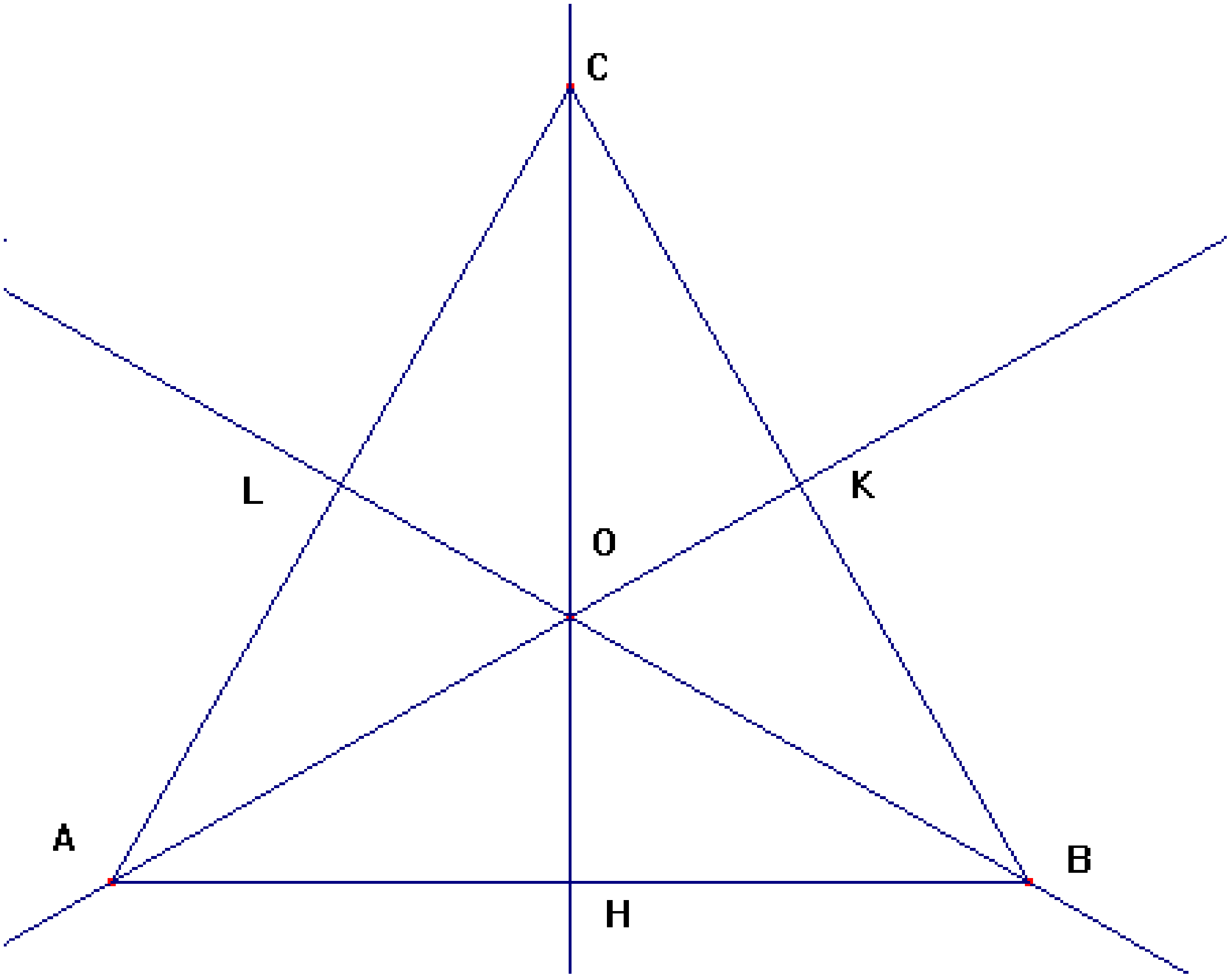
$$e\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$$



Analogamente, le altre trasformazioni agiscono sul vettore dei vertici nei seguenti modi:

- $r\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ A \\ B \end{pmatrix}$

- $r^2\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \\ C \\ A \end{pmatrix}$
- $s\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ B \\ A \end{pmatrix}$
- $rs\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ C \\ B \end{pmatrix}$
- $r^2s\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \\ A \\ C \end{pmatrix}$



Dobbiamo quindi scrivere ogni elemento di D_3 come la tabella di numeri necessaria a dare il risultato che vogliamo, cioè:

- e deve essere la matrice tale che, moltiplicata per il vettore dei vertici, restituisce il vettore dei vertici

$$\begin{pmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ? \cdot A + ? \cdot B + ? \cdot C = A \\ ? \cdot A + ? \cdot B + ? \cdot C = B \\ ? \cdot A + ? \cdot B + ? \cdot C = C \end{array} \right. \longrightarrow e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Analogamente troviamo che:

- $r\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ A \\ B \end{pmatrix} \longrightarrow$ $r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
- $r^2\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \\ C \\ A \end{pmatrix} \longrightarrow$ $r^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $s\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ B \\ A \end{pmatrix} \longrightarrow$ $s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $rs\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \\ A \\ C \end{pmatrix} \longrightarrow$ $rs = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $r^2s\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ C \\ B \end{pmatrix} \longrightarrow$ $r^2s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Abbiamo così trovato la rappresentazione matriciale di D_3 considerando i suoi elementi come trasformazioni che scambiano tra loro i vertici del triangolo equilatero, e andando a vedere come ognuna di queste agisce su ciascun vertice.

Questa è una rappresentazione “naturale” e “ingenua” di D_3, nel senso che si può immediatamente intuire dove viene mandato ogni vertice semplicemente guardando la posizione degli 1 nella matrice: D_3 viene ridotto a una trasformazione che scambia di posto tra loro 3 elementi.

Noi però abbiamo visto che D_3 è qualcosa di molto più profondo, che con questa rappresentazione matriciale non emerge.
I suoi elementi sono isometrie piane che agiscono non solo sui vertici del triangolo, ma su ogni punto del piano "spostandolo" in un altro punto del piano.
In questo modo, si ottiene un'altra rappresentazione matriciale di D_3 , che permette di capire in quale generico punto del piano di coordinate $\begin{pmatrix} x2 \\ y2 \end{pmatrix}$ viene spostato un generico punto del piano di coordinate $\begin{pmatrix} x1 \\ y1 \end{pmatrix}$ da ognuna delle trasformazioni!

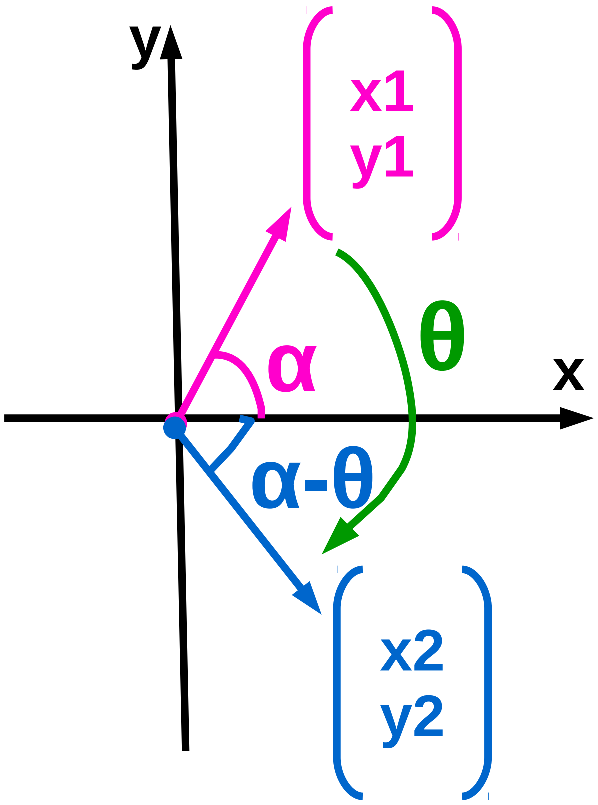
Vedendo ogni elemento di D_3 come isometria piana che sposta punti del piano in punti del piano, applichiamo la trasformazione a un vettore di due coordinate: la matrice sarà quindi una 2x2 (sia nella righe che nelle colonne ha lo stesso numero di elementi delle coordinate dell’oggetto su cui agisce), proprio perché è concepita per essere utilizzata con vettori 2-dimensionali.

Le “regole” viste per le 3x3 valgono anche per le 2x2, solo che cambia il numero di elementi che ci sono in gioco (ci sono meno conti da fare!)

$$\mathbf{e}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \mathbf{e} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

E LE ROTAZIONI?

Come possiamo capire quali sono le coordinate del punto in cui viene ruotato un generico punto del piano (ruotando di un angolo θ in verso orario)?



$$\begin{cases} x1 = \vec{v}\cos\alpha \\ y1 = \vec{v}\sin\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} x2 = \vec{v}\cos(-(\theta-\alpha)) = \vec{v}\cos(\theta-\alpha) \\ y2 = \vec{v}\sin(-(\theta-\alpha)) = -\vec{v}\sin(\theta-\alpha) \end{cases}$$

- $x2 = \vec{v}\cos(\theta-\alpha) = \vec{v}\cos\theta\cos\alpha + \vec{v}\sin\theta\sin\alpha =$
  $= x1\cos\theta + y1\sin\theta$

- $y2 = -\vec{v}\sin(\theta-\alpha) = -[\vec{v}\sin\theta\cos\alpha - \vec{v}\cos\theta\sin\alpha] =$
  $= -x1\sin\theta + y1\cos\theta$

$$\Downarrow$$

$$r\begin{pmatrix} x1 \\ y1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x2 \\ y2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x1\cos\theta + y1\sin\theta \\ -x1\sin\theta + y1\cos\theta \end{pmatrix}$$

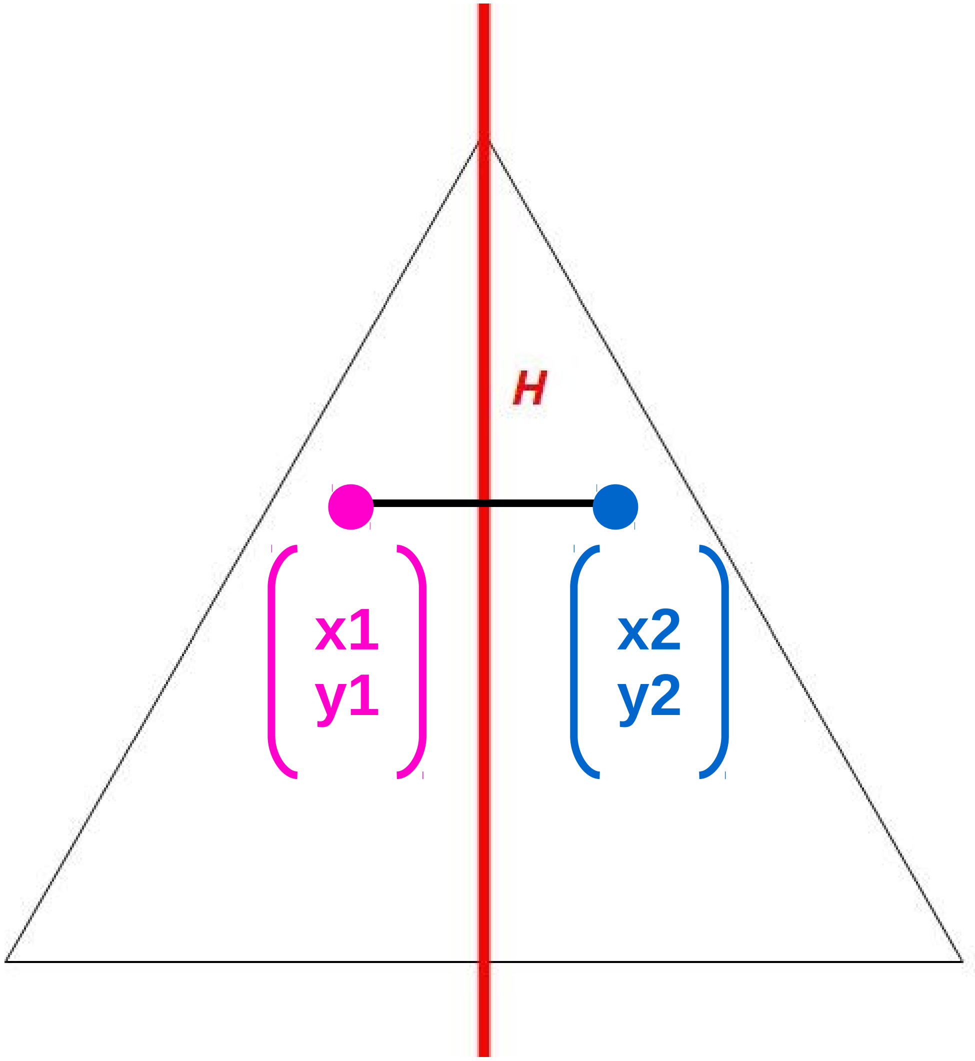
$$\begin{pmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x1 \\ y1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x2 \\ y2 \end{pmatrix} \Rightarrow r = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

- Le matrici corrispondenti a r e a r^2 si otterranno tenendo conto che sono rotazioni di angolo $\theta = 2\pi/3$ e di $\theta = 4\pi/3$ rispettivamente:

$$r = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \underset{\theta = 2\pi/3}{=} \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$r^2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \underset{\theta = 4\pi/3}{=} \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

- r^2s è la riflessione rispetto all’asse H: ogni punto del piano viene mandato nel suo simmetrico rispetto all’asse H:



- $x2 = -x1$
- $y2 = y1$

$$r^2s\begin{pmatrix} x1 \\ y1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x2 \\ y2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x1 \\ y1 \end{pmatrix} \Rightarrow r^2s = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x1 \\ y1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x2 \\ y2 \end{pmatrix}$$

- NB! Se una matrice è un “modo di scrivere matematicamente” una trasformazione di simmetria, la composizione di trasformazioni di simmetria si può vedere come il prodotto tra le matrici corrispondenti!

- Alla luce di ciò, per trovare s e rs usiamo dei piccoli trucchi!

- Iniziamo ricavandoci s conoscendo r^2s e r^2:

$$r^2 = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$r^2s = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix}$$

$$-1 = -1/2 \cdot ? \; + \left(-\sqrt{3}/2\right) \cdot ?$$
$$0 = -1/2 \cdot ? \; + \left(-\sqrt{3}/2\right) \cdot ?$$

Riga 1 di r^2s

$$0 = \sqrt{3}/2 \cdot ? \; + \left(-\,1/2\right) \cdot ?$$
$$1 = \sqrt{3}/2 \cdot ? \; + \left(-\,1/2\right) \cdot ?$$

Riga 2 di r^2s

Con un po’ di pazienza, si ricavano:

$$s = \begin{pmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Moltiplicando le matrici di r e s, troviamo rs:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}}_{r} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}}_{s} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}}_{rs}$$

Abbiamo così trovato la rappresentazione matriciale di D_3 considerando i suoi elementi come isometrie piane che agiscono su ogni punto interno al triangolo “spostandolo” in un altro punto interno al triangolo e quelli esterni al triangolo in punti esterni al triangolo.

- Le matrici ci permettono di scrivere ogni trasformazione di un D_n qualsiasi in modo “matematico”, e di poter lavorare matematicamente con questo!

- $r^{n-1} = r^{-1}$
- $s\ r\ s = r^{-1}$
- $r^n = e$
- $s^2 = e$

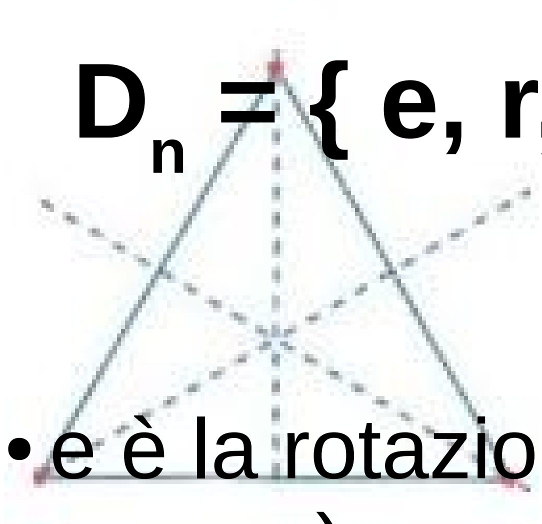
Vi avevo lasciato da verificare queste uguaglianze da soli, dicendovi di usare immaginazione e disegni.. Con le matrici si dimostra in un batter d’occhio

NB: r^{-1} è da intendersi come la matrice inversa di r, ovvero quella che moltiplicata con r dà la matrice identità (che ha 0 ovunque e 1 sulla diagonale)

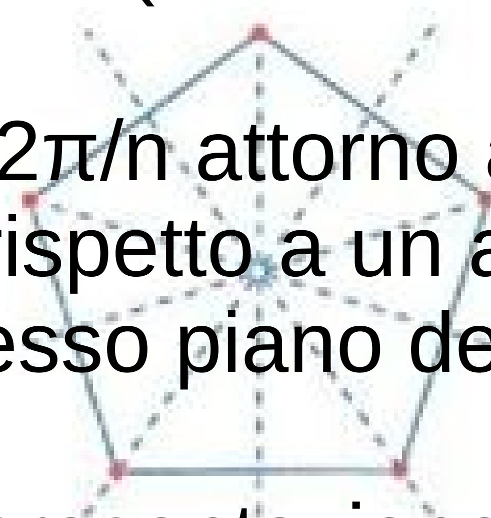
Ricordando che:

$$D_n = \{ e, r, r^2, . . , r^{n-1}, s, rs, r^2s, \dots , r^{n-1}s\}$$

dove :



- e è la rotazione nulla (ovvero l'elemento neutro del gruppo);
- r è la rotazione di $2\pi/n$ attorno a O;
- s è la riflessione rispetto a un asse di simmetria che giace sullo stesso piano del poligono;



abbiamo una rappresentazione matriciale di D_n che vede i suoi elementi come isometrie piane (matrici 2x2):

$$r = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

con $\theta = 2\pi/n$

$$r^{\alpha} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

con $\theta = 2\alpha\pi/n$

$(0 \leq \alpha \leq n-1)$

$$s = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$