

Lo spazio euclideo n -dimensionale \mathbb{E}^n

- Punti e segmenti
- Segmenti orientati e vettori
- Operazioni vettoriali
- Coordinate di un vettore, basi canoniche
- Prodotto scalare e norme, vettori ortogonali.

Il gruppo lineare GL_n

- Trasformazioni lineari $f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ (ENDOMORFISMI DI \mathbb{E}^n)
- Rappresentazione matriciale
- Composizione e prodotto matriciale
- Trasformazioni invertibili e determinante

Il gruppo ortogonale O_n

- Isometrie lineari e matrici ortogonali
- Inverse di una isometria lineare e matrice trasposta
- Rappresentazione matriciale del sottogruppo $O_2 \subseteq GL_2$
- Rotazioni, riflessioni, loro inverse e composizioni
- Il sottogruppo normale delle rotazioni e l'azione delle riflessioni.

NOTE per O_2 : • rotazione $A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ di α rad.

• riflessione $B_\beta = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \beta & -\cos \beta \end{pmatrix}$ su retta per O di angolo $\beta/2$ rad.

COMPOSIZIONE

$$A_{\alpha_2} A_{\alpha_1} = A_{\alpha_1 + \alpha_2} \quad ; \quad B_{\beta_2} B_{\beta_1} = A_{\beta_2 - \beta_1} \quad ; \quad A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e \text{ identit\`a}$$

$$A_\alpha^{-1} = A_{-\alpha} \quad ; \quad B_\beta^{-1} = B_\beta \quad ; \quad B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ riflessione sull'asse } y=0$$

$$B_\beta A_\alpha = B_{\beta - \alpha}$$

$$B_\beta A_\alpha = B_{\beta-\alpha} \Rightarrow B_\beta A_\alpha B_\beta = A_{-\alpha}$$

$$A_\alpha B_\beta = B_{\alpha+\beta}$$

SIMMETRIA CENTRALE

ha matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A_\pi$: quindi vi è simmetria centrale ogni volta che c'è simmetria rotazionale di ordine pari.

PERIODO DEGLI ELEMENTI

- B_β ha periodo 2 $\forall \beta$
- A_α $\begin{cases} \text{è periodico se } \alpha \in \mathbb{Q}\pi \\ \text{è aperiodico se } \alpha \notin \mathbb{Q}\pi \end{cases}$

IL GRUPPO EUCLIDEO E_2

- Isometrie del piano $E_2 = T_2 O_2$, con $T_2 =$ traslazioni di E^2
 $O_2 =$ isometrie lineari di E^2

COMPOSIZIONE

$$T_2 = \left\{ t_{\vec{v}} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \mid \vec{v} \in E^2 \right\}$$

$$O_2 = \left\{ \varphi : \varphi = A_\alpha \vee \varphi = B_\beta, \alpha, \beta \in [0, 2\pi[\right\}$$

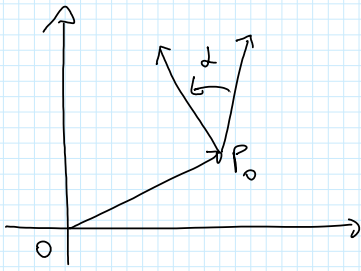
$$t_{\vec{v}} \circ \varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{cases} A_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \\ B_\beta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \end{cases} ; \quad t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}, \quad t_{\vec{v}}^{-1} = t_{-\vec{v}}$$

$$\underline{\varphi \circ t_{\vec{v}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \varphi \begin{pmatrix} x+v_x \\ y+v_y \end{pmatrix} = \varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \varphi \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \underline{t_{\varphi(\vec{v})} \circ \varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} \quad \text{poiché } \varphi \text{ è lineare}$$

$$\underline{\varphi \circ t_{\vec{v}}^{-1} \circ \varphi^{-1}} = \left(t_{\varphi(\vec{v})} \circ \varphi \right) \circ \varphi^{-1} = t_{\varphi(\vec{v})} \circ \left(\varphi \circ \varphi^{-1} \right) = \underline{t_{\varphi(\vec{v})}}$$

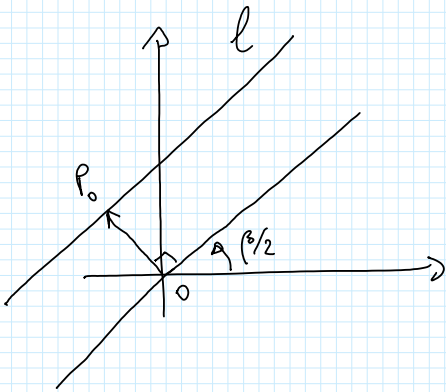
ROTAZIONI ATTORNO AD UN PUNTO P_0

$$\uparrow \quad \nwarrow, \downarrow \nearrow \quad t \circ A_\alpha \circ t_0^{-1} = t \circ A_\alpha \circ t = t \circ t \circ A_\alpha = t \circ A_\alpha$$



$$\underline{t_{P_0} \circ A_\alpha \circ t_{P_0}^{-1} = t_{P_0} \circ A_\alpha \circ t_{-P_0} = t_{P_0} \circ t_{-P_0} \circ A_\alpha = t_{P_0 - A_\alpha P_0} \circ A_\alpha}$$

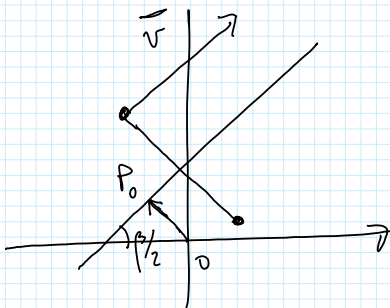
RIFLESSIONE LUNGO UNA RETTA ARBITRARIA



$$\underline{t_{P_0} \circ B_\beta \circ t_{P_0}^{-1} = t_{P_0} \circ B_\beta \circ t_{-P_0} = t_{P_0} \circ t_{-B_\beta P_0} \circ B_\beta =}$$

$$= t_{P_0 - B_\beta P_0} \circ B_\beta = \underline{t_{2P_0} \circ B_\beta}$$

GLISSO-RIFLESSIONE LUNGO UNA RETTA ARBITRARIA



$$\underline{t_{\bar{v}} \circ t_{2P_0} \circ B_\beta = t_{2P_0 + \bar{v}} \circ B_\beta}$$

CLASSIFICAZIONE DI E_2

- a) Ogni isometria diretta $\varphi = t_{\bar{v}} \circ A_\alpha$ è una pure traslazione oppure una rotazione attorno ad un opportuno punto P_0
- b) Ogni isometria inversa $\psi = t_{\bar{v}} \circ B_\beta$ è una riflessione o una glisso-riflessione relative ad una opportuna retta.