MATh.en.JEANS

Il problema delle Idre

Liceo Scientifico "E. Curiel"
Padova

27 marzo 2017

Sommario

Nel presente documento abbiamo affrontato i due problemi che sono stati proposti all'interno del progetto MATh.en.JEANS: il bestiario di Marie-José e la battaglia delle Idre.

Il primo problema è riconducibile allo studio del numero di possibili grafi ad albero in dipendenza del numero di nodi e dell'altezza del grafo stesso. Una riformulazione del problema ci ha portato a concludere che esso è analogo allo studio dei percorsi di Dyck o delle disposizioni di parentesi annidate.

Il secondo problema si è rivelato più complesso da affrontare matematicamente: ne abbiamo quindi considerato e risolto una sua versione semplificata.

Gli autori ringraziano per il supporto e gli utili consigli il prof. Zanardo del Dipartimento di Matematica "Tullio Levi Civita" dell'Università degli Studi di Padova.

Indice

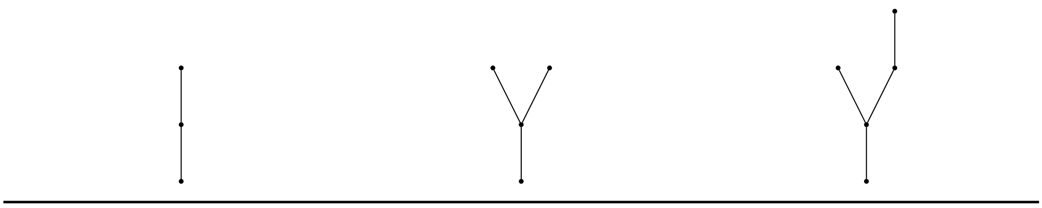
1 Il primo problema: il bestiario di Marie-José

L'idra è un animale mitico molto raro. Non si sa molto su questo essere vivente. Si sa che, quando nascono, le idre hanno una sola testa, ancorata al suolo. Poi crescono in due modi diversi:

1. si forma un nodo alla base di una testa, e un collo si allunga tra la testa e il nodo;

2. compare una nuova testa su un nodo già esistente, e un collo si allunga tra la nuova testa e il nodo.

Nella seguente figura mostriamo alcuni modi in cui un'idra può crescere:



Dal giugno scorso, Marie-José ha inziato a collezionare idre. Poiché intende esporle sui muri della casa, ha deciso di farle crescere dentro delle cornici per ottenere dei graziosi quadri. In questo modo, per una data idra, esistono diversi quadri possibili.

Marie-José possiede già parecchie idre diverse. Per classificarle, ha deciso di misurare lo sviluppo delle sue idre sulla base della loro taglia, considerando sia le teste sia i nodi. La taglia n di un'idra è la somma del numero delle sue teste e del numero dei suoi nodi.

Marie-José, a cui piace anche occuparsi di matematica, vuole sapere se esiste una formula, dipendente dal numero n, che fornisca il numero di quadri diversi contenenti un'idra di taglia n. Per esempio, c'è un solo quadro con un'idra di taglia 1 e un solo quadro per un'idra di taglia 2. Al contrario, ci sono due quadri possibili per un'idra di taglia 3.

Ercole, in seguito ad una brutta esperienza personale, preferisce le idre con altezza massima 2 (l'altezza di un collo è 1). Esiste una formula che permetta di determinare il numero di quadri contenenti le idre di taglia n e altezza 2? La stessa domanda per le idre di taglia n e altezza k.

2 Considerazioni preliminari

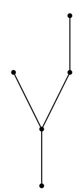
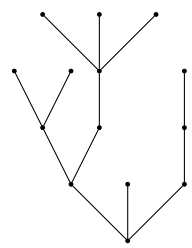
Si osservi preliminarmente che un'idra è modellizzabile con un grafo ad albero, ossia un grafo planare che divide il piano in una sola superficie. Per la relazione di Eulero si avrà:

$$f + n - s = 2 \tag{2.1}$$

dove: f è il numero di facce[1], n la taglia (numero di teste e nodi), s il numero di colli. Osserviamo che nel nostro caso $s = n - 1$.

Ogni grafo ha un nodo base (l'unica testa che l'idra possiede inizialmente). Per ogni altro nodo definiamo *altezza* il numero di colli compresi tra esso stesso e il nodo base. Si dice altezza k dell'idra il massimo tra le altezze dei singoli nodi.

Esempi:

$n = 4$ $k = 3$	$n = 5$ $k = 3$	$n = 14$ $k = 4$
		

3 Classi di idre

È utile, ai fini del calcolo del numero delle possibili idre, suddividere quest'ultime in classi.

Si definisce *classe* una sequenza finita di naturali non nulli $\{x_1, \dots, x_k\}$ dove l'elemento x_i identifica il numero totale di rami (colli) presenti ad altezza i, indipendentemente dalla loro collocazione.

Si ha dunque che:

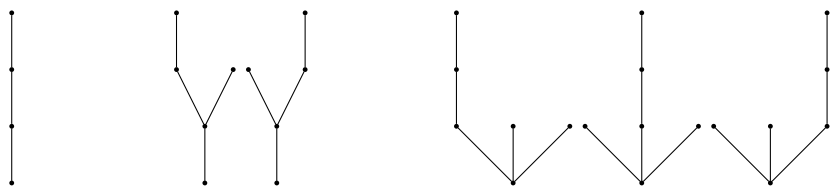
$$s = n - 1 = x_1 + \cdots + x_k \tag{3.1}$$

[1] Ovvero il numero di regioni limitate dai bordi, inclusa la regione esterna infinitamente grande. Nel nostro caso, banalmente, $f = 1$.

Osserviamo che, nei casi non banali, le classi sono composte da più idre distinte.

Facciamo alcuni esempi:

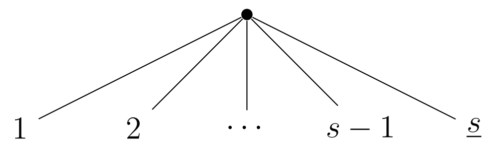
Classe $\{1,1,1\}$	Classe $\{1,2,1\}$	Classe $\{3,1,1\}$



Albero generatore delle classi

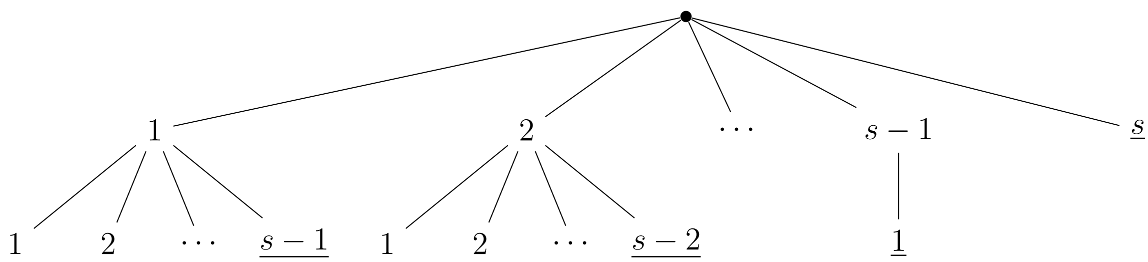
Per costruire tutte le possibili classi di idre con s e k assegnati, si procede come segue:

Nel primo livello si possono collocare da 1 a s rami:



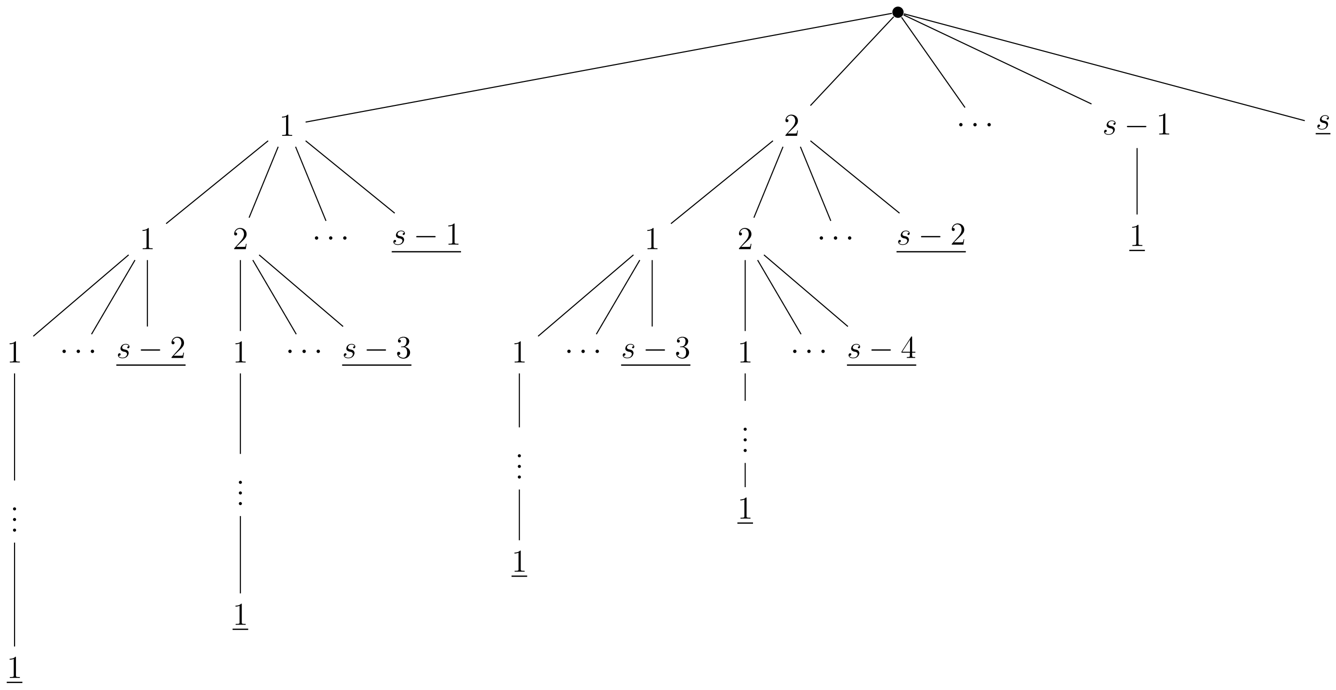
Se ne vengono collocati esattamente s, non si avranno più rami a disposizione per i livelli successivi. Osserviamo tuttavia che è già stato collocato il numero di rami voluto. Si ottiene pertanto l'unica classe $\{s\}$.

Nei restanti $s-1$ casi, invece, c'è ancora a disposizione almeno un ramo da disporre al livello successivo. Si procede quindi posizionando, laddove possibile, ulteriori rami al secondo livello.



Nel secondo livello si sono formate $s-1$ nuove classi, del tipo $\{i, s-i\}$ con $1 \leq i \leq s-1$.

Si procede ricorsivamente con la costruzione dell'albero fino all'esaurimento delle possibilità. L'albero finale avrà pertanto la seguente forma:

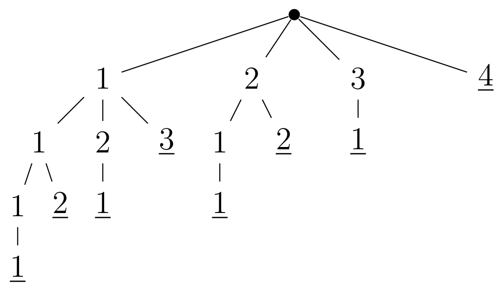


Si noti che sono stati sottolineati i valori per cui la somma dei numeri presenti nei rami che conducono al nodo base risulta s e la classe è completa.

Per enumerare tutte le classi, basta ora ripercorrere dall'alto l'albero delle classi in tutti i modi possibili che portino a un numero sottolineato. Se ci si limita alle classi di una data altezza, o di altezza minore o uguale al valore k dato, si selezionano solo le classi che si concludono rispettivamente al k-esimo passaggio, o nei primi k passaggi.

Esempio

Per $s = 4$ e $k \leq 3$ l'albero è il seguente:



Le classi saranno dunque:

$$\{1,1,2\},\{1,2,1\},\{1,3\},\{2,1,1\},\{2,2\},\{3,1\},\{4\}$$

4 Possibilità per una data Classe

Si presenta ora il problema di determinare quanti diversi grafi è possibile costruire data una classe $\{x_1,\ldots,x_k\}$. Possiamo procedere come segue.

Per il primo livello, indipendentemente dal valore di x_1, avremo una sola possibilità di tracciare x_1 rami.

Per il livello i-esimo, invece, vi sono più possibilità di disporre gli x_i rami tra gli x_{i-1} nodi che i rami del livello inferiore mettono a disposizione. Il problema si traduce in quello di calcolare i modi in cui è possibile variare x_{i-1} numeri interi (il numero di rami al livello i-esimo per ciascun nodo del livello precedente) positivi o nulli, in modo tale che la loro somma risulti esattamente x_i (il numero di rami che bisogna disporre al livello i-esimo).

Per fare ciò consideriamo $x_i + x_{i-1} - 1$ caselle bianche in fila, di cui ne andiamo ad annerire $x_{i-1} - 1$.

$$\overbrace{\square\blacksquare\square\square\blacksquare\square\square\cdots\square\square\square\blacksquare}^{x_i+x_{i-1}-1\text{ caselle}}$$

Osserviamo che comunque si anneriscano le caselle, rimangono x_i caselle bianche (la somma degli x_{i-1} numeri). Le caselle annerite invece fungono da separatori, ossia nella sequenza di caselle delineano $(x_{i-1} - 1) + 1 = x_{i-1}$ zone (eventualmente nulle), che rappresentano i singoli numeri la cui somma vogliamo faccia x_i. Ciascuno di questi numeri rappresenta il numero di rami che andremo a tracciare, nell'ordine, su ciascuno dei nodi del livello precedente.

Le possibilità di disporre i rami equivalgono dunque a quelle di scegliere $x_{i-1}-1$ elementi (le caselle nere) da un insieme che ne contiene $x_i+x_{i-1}-1$, ossia $\binom{x_i+x_{i-1}-1}{x_{i-1}-1}$.

Non resta che eseguire tale calcolo per ogni livello della classe e moltiplicare i valori ottenuti.

$$p\{x_1,\cdots,x_k\} = \prod_{i=2}^{k} \binom{x_i + x_{i-1} - 1}{x_{i-1} - 1} \tag{4.1}$$

Esempio

Riprendiamo l'esempio precedente: con $s = 4$ e $k \leq 3$ abbiamo le seguenti classi:

$$\{1,1,2\},\{1,2,1\},\{1,3\},\{2,1,1\},\{2,2\},\{3,1\},\{4\}$$

$$\begin{aligned}
p\{1,1,2\} &= \binom{1+1-1}{1-1}\binom{2+1-1}{1-1} = 1\cdot 1 &&= 1\\
p\{1,2,1\} &= \binom{2+1-1}{1-1}\binom{1+2-1}{2-1} = 1\cdot 2 &&= 2\\
p\{1,3\} &= \binom{3+1-1}{1-1} &&= 1\\
p\{2,1,1\} &= \binom{1+2-1}{2-1}\binom{1+1-1}{1-1} = 2\cdot 1 &&= 2\\
p\{2,2\} &= \binom{2+2-1}{2-1} &&= 3\\
p\{3,1\} &= \binom{1+3-1}{3-1} &&= 3\\
p\{4\} &= &&= 1
\end{aligned}$$

Dunque le possibilità saranno $1+2+1+2+3+3+1 = 13$.

5 Formula generale

In conclusione, per calcolare i possibili grafi dati s (e k), si trovano prima tutte le possibili classi (selezionando eventualmente in base all'altezza), per ciascuna si calcolano le possibilità con la formula precedente e si sommano infine i risultati. Possiamo pertanto scrivere che il numero $N(n,k)$ di idre di taglia n e altezza k sono

$$N(n,k) = \sum_{\substack{x_1+\cdots+x_k=n-1\\ 1\leq x_1,\cdots,x_k\leq n-k}} p\{x_1,\cdots,x_k\} \tag{5.1}$$

Il numero delle idre cresce molto velocemente all'aumentare di n (e di k). Al fine di realizzare tale computo, si ricorre a una proceduta algoritmica: inizialmente si permutano in tutti i modi possibili i valori $x_1,\cdots,x_k$, se ne calcolano in seguito le possibilità tramite la (4.1) e infine si sommano i risultati ottenuti.

Lo schema dell'algoritmo in pseudocodice è il seguente:

```
poss := 0

function permute : (x_1, ··· , x_k), length, partialSum

    if length = 1
        x_k := partialSum
        poss := poss + p{x_1, ··· , x_k}
        return
    end

    for i ∈ ℕ, 1 ≤ i ≤ partialSum - 1
        x_{k−length} := i
        permute : (x_1, ··· , x_k), length - 1, partialSum - i
    end

end
```

La funzione `permute` fissa il primo elemento della classe in analisi e, ricorsivamente, fa ciclare i valori della sottoclasse che si ottiene escludendo il primo elemento (problema analogo a quello di partenza). Detta sottoclasse avrà come somma s degli elementi la somma degli elementi della classe iniziale a cui è stato sottratto l'elemento escluso. Questo procedimento continua finché viene presa in analisi una classe con un solo elemento. In tal caso, la classe assumerà il solo valore possibile (`partialSum`) che sarà ora pari a $s - (x_1 + \cdots + x_{k-1})$, dove $s = n - 1$ è la somma degli elementi della classe iniziale.

La chiamata iniziale, fissati n e k, sarà:

```
permute : (0, ··· , 0), k , n-1
```

Al termine si avrà:

$$\text{poss} = N(n, k)$$

6 Output

Seguono i valori di output dell'algoritmo per $n \leq 25$ e $k \leq 6$:

n	$N(n,2)$	$N(n,3)$	$N(n,4)$	$N(n,5)$	$N(n,6)$
3	1				
4	3	1			
5	7	5	1		
6	15	18	7	1	
7	31	57	33	9	1
8	63	169	132	52	11
9	127	482	484	247	75
10	255	1341	1684	1053	410
11	511	3669	5661	4199	1975
12	1023	9922	18579	16017	8778
13	2047	26609	59917	59224	36938
14	4095	70929	190696	214058	149501
15	8191	188226	600744	760487	587951
16	16383	497845	1877256	2665884	2262375
17	32767	1313501	5828185	9246276	8558854
18	65535	3459042	17998783	31793724	31945379
19	131071	9096393	55342617	108548332	117939506
20	262143	23895673	169552428	368400045	431530926
21	524287	62721698	517884748	1244027317	1567159901
22	1048575	164531565	1577812060	4182854728	5655480303
23	2097151	431397285	4796682165	14012220027	20299352107
24	4194303	1130708866	14555626635	46789129817	72522832282
25	8388607	2962826465	44100374341	155798575851	258054207727

7 Caso $k = 2$

Nel caso particolare $k = 2$ è possibile ricavare una formula esplicita per il numero di idre.

È già noto dalla Sezione 3 che tutte le classi di altezza 2 sono del tipo $\{x_1, n-1-x_1\}$, con $1 \leq x_1 \leq s-1$. Si ricorda inoltre che $\sum_{\kappa=0}^{\nu} \binom{\nu}{\kappa} = 2^{\nu}$.

Si avrà pertanto:

$$
\begin{aligned}
N(n,2) &= \sum_{\substack{x_1+x_2=n-1\\ 1\le x_1,x_2\le n-2}} p\{x_1,x_2\}\\
&= \sum_{x_1=1}^{n-2} p\{x_1, n-1-x_1\}\\
&= \sum_{x_1=1}^{n-2} \binom{n-2}{x_1-1}\\
&= \sum_{x_1=1}^{n-1} \binom{n-2}{x_1-1} - \binom{n-2}{n-2}\\
&= 2^{n-2}-1
\end{aligned}
$$

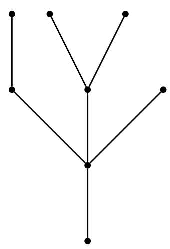
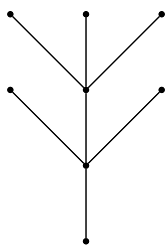
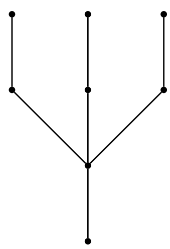
8 Isomorfismi

8.1 Parentesi annidate

È possibile associare univocamente un'idra a una serie di parentesi bilanciate (ossia per ogni parentesi aperta ve ne deve essere una chiusa) e annidate.

- A ogni livello di profondità corrisponde un'altezza;
- Coppie di parentesi affiancate, allo stesso livello di profondità, rappresentano colli che si diramano da uno stesso nodo.

Esempi:

$\Bigg(\bigg(()\bigg)\bigg(()()\bigg)\bigg(\bigg)\Bigg)$	$\Bigg(\bigg(\bigg)\bigg(()()()\bigg)\bigg(\bigg)\Bigg)$	$\Bigg(\bigg(()\bigg)\bigg(()\bigg)\bigg(()\bigg)\Bigg)$
		

È noto[2] che il numero di modi in cui si possono disporre s parentesi bilanciate è il numero di Catalan C_s, definito come:

$$C_s := \frac{1}{s+1}\binom{2s}{s}$$

Indichiamo con $N(n)$ il numero di possibili idre di classe n, con altezza variabile tra 1 e $n-1$, ossia:

$$N(n) := \sum_{k=0}^{n-1} N(n,k) \tag{8.1}$$

Si avrà, per la corrispondenza tra idre e parentesi annidate:

$$\begin{aligned} N(n) &= C_{n-1} \\ &= \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1} = \frac{(2n-2)!}{n\big((n-1)!\big)^2} \end{aligned} \tag{8.2}$$

Una conferma della (8.2) si può ottenere effettuando manualmente il calcolo indicato dalla (8.1); ciò corrisponde a sommare per righe i valori della tabella della sezione 6.

Risulta la seguente lista di valori, che è l'inizio della sequenza dei numeri di Catalan:

n	$N(n)$	n	$N(n)$
2	1	14	742900
3	2	15	2674440
4	5	16	9694845
5	14	17	35357670
6	42	18	129644790
7	132	19	477638700
8	429	20	1767263190
9	1430	21	6564120420
10	4862	22	24466267020
11	16796	23	91482563640
12	58786	24	343059613650
13	208012	25	1289904147324

[2]Si veda, ad esempio: `https://en.wikipedia.org/wiki/Catalan_number#Applications_in_combinatorics`

8.2 Percorsi di Dyck

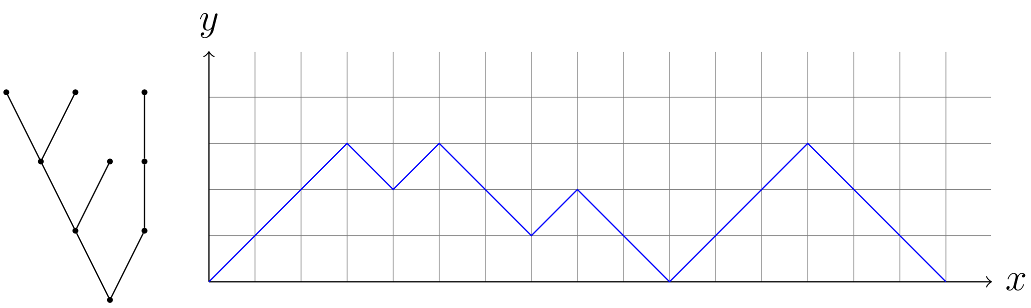
Un altro modo in cui il problema può essere tradotto è in termini di percorsi di Dyck. Definiamo innanzi tutto i percorsi di Dyck come i cammini lungo le diagonali dei quadrati di una griglia $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ tali che:

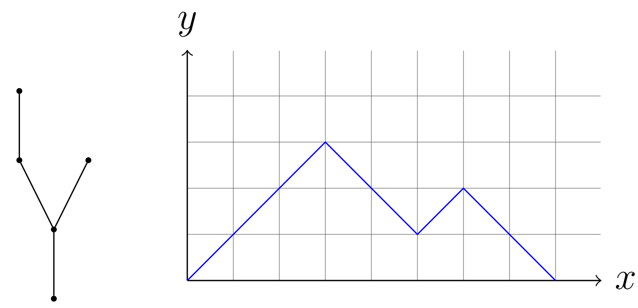
- Si parta da $(0, 0)$ e si arrivi in $(2s, 0)$; dove, nel contesto del problema, $s = n - 1$;
- Se un punto (x_0, y_0) appartiene al cammino, il punto successivo possa essere soltanto $(x_0 + 1, y_0 + 1)$ oppure $(x_0 + 1, y_0 - 1)$.

Per tradurre un'idra in un cammino si usano le seguenti regole:

- Si percorre ogni ramo dell'idra, partendo dalla radice (nodo base), nell'ordine dal basso verso l'alto e da sinistra verso destra. Giunti a una testa, si discende fino al primo nodo che presenti diramazioni e si percorre allo stesso modo ciascuna di queste. Al termine si arriverà nuovamente al nodo base. In tal modo ogni collo dell'idra sarà stato percorso due volte (motivo per cui il percorso è costituito da $2s$ passi);
- A ogni spostamento in alto (basso) lungo l'idra corrisponde un passo nel cammino di Dyck in alto (basso) a destra.

Esempi:





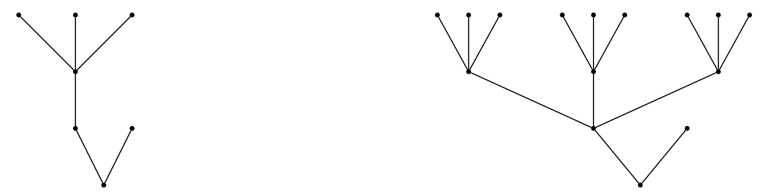
Come prima, è noto[3] che il numero di possibili percorsi di Dyck fissata la lunghezza $2s$ è esattamente il numero di Catalan C_s. L'espressione è identica alla (8.2).

[3] Weisstein, Eric W. "Dyck Path." From MathWorld – A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/DyckPath.html

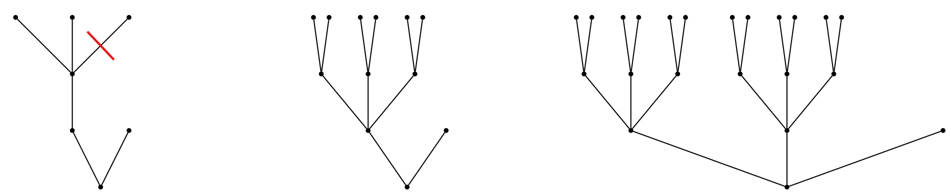
9 Il secondo problema: la battaglia delle idre

Le idre, inoffensive quando sono allevate con amore e gentilezza, diventano delle temibili bestie feroci quando vengono attaccate. Sono degli animali quasi invulnerabili. Solo le teste possono essere tagliate. Non appena un nodo si trova senza steli sopra di lui, si trasforma in una testa. Infine, quando viene tagliata una testa, il nodo che ha perso quella testa manda un messaggio di replicazione che si propaga dal nodo stesso fino al piede dell'idra, solo dall'alto verso il basso, senza mai risalire né mai biforcarsi. Ogni volta che il messaggio attraversa un collo, questo si duplica un numero arbitrario di volte. In altri termini, il collo, assieme a tutte le parti dell'idra attaccate al nodo superiore del collo stesso, si duplicano in un numero qualunque di esemplari. Alla fine l'idra attacca il suo aggressore fino alla fine della sua vita, obbligandolo a difendersi e a riattaccare.

Ecco un esempio di replicazione di un collo:



Ecco un esempio di combattimento in cui un'idra si è replicata dopo aver perso una delle sue teste:



In seguito a una storia stupida e grottesca, Ercole ha iniziato una battaglia con un'idra. Potete aiutarlo? Esiste una strategia che gli permetta di vincere l'idra? Cosa non dovrebbe fare soprattutto per non perdere contro l'idra?

10 Una versione semplificata del problema

Considereremo qui una versione semplificata del problema: in prima analisi si può supporre che il messaggio di replicazione non discenda fino alla base dell'idra, bensì soltanto di un livello.

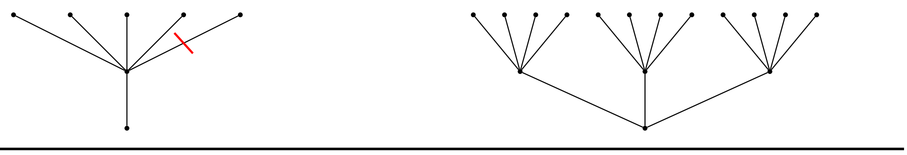
Dimostreremo che è sempre possibile abbassare di un livello l'altezza dell'idra e, applicando il principio di induzione, che è sempre possibile uccidere un'idra con un numero finito di colpi. La strategia che utilizzeremo sarà quella di colpire l'idra a partire dal livello di altezza massima[4].

È opportuno introdurre alcune definizioni:

Definizione 1. *Si dice **estensione massima** E_h il numero massimo di colli terminali*[5] *ad altezza h che si diramano dal medesimo nodo.*

Definizione 2. *Si dice $M(E_h)$ il numero di nodi da cui si diramano **esattamente** E_h colli terminali ad altezza h.*

La dimostrazione della possibilità di uccidere un'idra con un numero finito di colpi si basa sulla seguente osservazione: ad ogni taglio su un nodo da cui si diramano esattamente E_h colli terminali uno tra i valori di $M(E_h)$ e E_h diminuisce[6]. Si consideri infatti un nodo ad altezza h che da cui si diramano esattamente E_h colli terminali.



Poiché il segnale di replicazione si abbassa di un solo livello, se $M(E_h) = 1$ (ovvero si ha un solo nodo da cui si diramano esattamente E_h colli terminali) dopo il taglio il numero massimo di colli terminali che si possono diramare da un nodo sarà $E_h - 1$ (notiamo che viceversa il numero $M(E_h)$ potrebbe essere aumentato); se $M(E_h) > 1$, invece, il numero di nodi da cui si diramano esattamente E_h colli terminali sarà diminuito di una unità.

[4]In realtà è possibile colpire l'idra in maniera casuale. La dimostrazione che proponiamo implica infatti che, in un numero finito di colpi, eventualmente molto elevato, bisognerà colpire l'idra al suo livello più alto.

[5]Non si considerano in questo contesto i colli che terminano con un nodo in quanto non è possibile tagliarli.

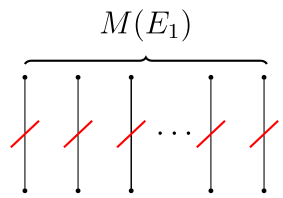
[6]Questo in generale non accade se il segnale discende fino a terra.

Dimostriamo anzitutto il seguente lemma:

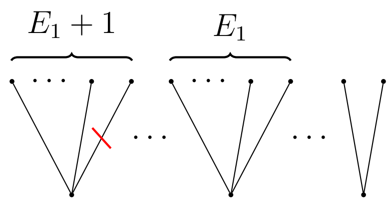
Lemma 1. *È possibile uccidere, con un numero finito di tagli, un numero finito di idre di altezza 1.*

Dimostrazione del lemma 1. Si procede per induzione sull'estensione E_1:

Passo base Essendo $E_1 = 1$, $M(E_1)$ è uguale al numero totale di colli. Con $M(E_1)$ tagli si eliminano, pertanto, tutti i colli presenti e, poiché questi non si riproducono, si uccide l'idra:



Passo induttivo Consideriamo un numero finito di idre di estensione massima complessiva $E_1 + 1$. Con esattamente $M(E_1 + 1)$ tagli, uno per ciascuna idra che presenti la massima estensione, si ottengono idre con estensione massima al più E_1; queste possono essere uccise per ipotesi induttiva.



Dunque è possibile uccidere un numero finito di idre di altezza 1, qualsiasi sia il numero di colli sopra ciascuna di queste. □

Dimostriamo ora il seguente teorema:

Teorema 1. *È possibile uccidere, con un numero finito di tagli, un'idra di altezza k in cui il segnale di riproduzione scende di un solo livello.*

Dimostrazione del teorema 1. Si procede per induzione sull'altezza k:

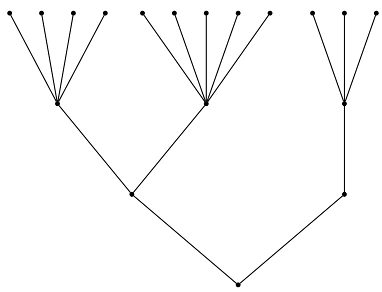
Passo base Un'idra di altezza 1 si può uccidere per il lemma 1.

Passo induttivo Bisogna dimostrare che è possibile uccidere un'idra di altezza $h = k + 1$ supponendo di poterlo fare nel caso $h = k$. Se si è in grado di abbassare di 1 l'altezza, dunque, per ipotesi induttiva è pure possibile uccidere l'idra.

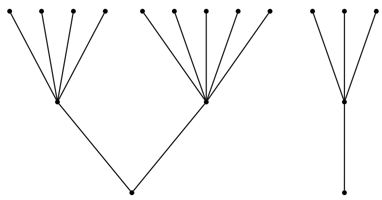
Poiché il segnale scende solo di un livello, i tagli con $h = k + 1$ non avranno ripercussioni al di sotto di $h = k$. Si possono pertanto isolare le altezze k e $k + 1$; così facendo, in generale, l'idra si presenta come più idre distinte con $h = 2$.

Dunque dobbiamo dimostrare che è possibile uccidere con un numero finito di tagli un numero finito di idre di altezza 2.

Esempio:



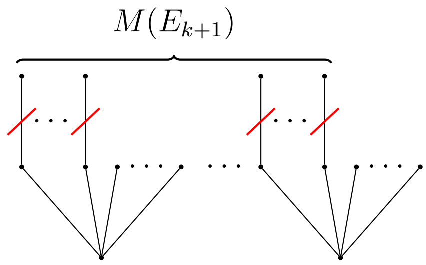
Isolando i livelli 2 e 3 si ottengono due idre di altezza 2:



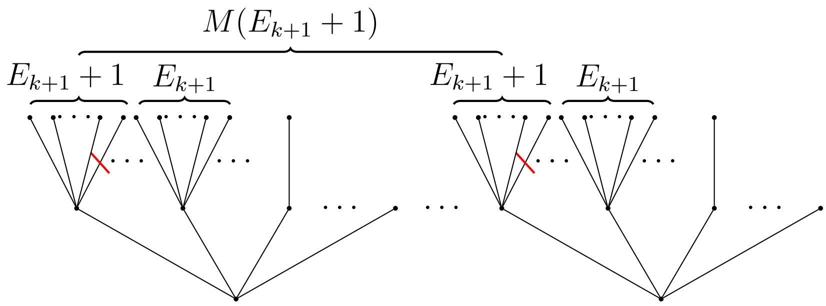
Si procede ora dimostrando, per induzione sul valore di E_{k+1} (estensione all'altezza massima), che è possibile abbassare l'idra di un livello.

Passo base Il caso $E_{k+1} = 0$ è banale: in tale situazione non vi può essere alcun collo per $h = k + 1$, dunque l'idra è già ridotta.

Si consideri pertanto il caso $E_{k+1} = 1$: in tale situazione, con esattamente $M(E_{k+1})$ tagli si può abbassare l'idra di un livello.



Passo induttivo Si consideri ora un'idra di estensione $E_{k+1}+1$; anche in questo caso è possibile ridurre di 1 la sua altezza. Infatti, con esattamente $M(E_{k+1}+1)$ tagli, uno per ogni gruppo di colli dove si presenti la massima estensione, l'idra si riduce a una con estensione massima E_{k+1}; una tale idra può essere abbassata di livello per ipotesi di induzione.



Per ogni valore dell'estensione è quindi possibile diminuire di 1 l'altezza dell'idra.

Dunque, si può uccidere una qualsiasi idra purché il messaggio di replicazione discenda di un solo livello. $\square$