Correzione degli esercizi assegnati nella lezione del 19/02/16
a cura del Prof. Fernando D'Angelo.

Premessa.

Per quanto visto a lezione sappiamo che l'equazione omogenea $y' = a(x)y$ ha per soluzione $y = Ce^{A(x)}$, essendo $A(x)$ una primitiva di $a(x)$.

Soluzioni degli esercizi assegnati

(a) $y' = -\frac{4}{5}y$

L'equazione è omogenea. Pertanto la soluzione della (a) è data da $y = Ce^{-\frac{4}{5}x}$.

(b) $y' = \sin x \cdot y$

L'equazione è omogenea. $a(x) = \sin x \quad \rightarrow \quad A(x) = \int a(x)dx = \int \sin x dx = -\cos x + C'$

Pertanto la soluzione della (b) è data da $y = Ce^{-\cos x}$.

(c) $y' = \frac{y}{x+1}$

L'equazione è omogenea. $a(x) = \frac{1}{x+1} \quad \rightarrow \quad A(x) = \int a(x)dx = \int \frac{1}{x+1}dx = \ln|x+1| + C'$

Pertanto la soluzione della (c) è data da $y = Ce^{\ln|x+1|} = C \cdot |x+1|$.

(d) $y' = -4y + 3x + 1$

L'equazione è non omogenea.

Sappiamo che l'equazione omogenea $y' = a(x)y$ ha per soluzione $y = Ce^{A(x)}$, essendo $A(x)$ una primitiva di $a(x)$; pertanto la soluzione della omogenea $y' = -4y$ è $y_o = Ce^{-4x}$.

Cerchiamo una soluzione particolare della non omogenea del tipo: $\tilde{y} = mx + q$.

Determiniamo *m* e *q* sostituendo nella (d).

$\tilde{y}' = m = -4(mx+q) + 3x + 1$ da cui

$(3-4m)x - 4q + 1 - m = 0$. Annullando i coefficienti del polinomio:

$$\begin{cases} 3-4m=0 \\ -4q+1-m=0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} m = \frac{3}{4} \\ q = \frac{1}{16} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \tilde{y} = \frac{3}{4}x + \frac{1}{16}$$

La soluzione generale della (d) è allora data da : $y(x) = \tilde{y}(x) + y_o(x) = \frac{3}{4}x + \frac{1}{16} + Ce^{-4x}$

(e) $y' = y + \sin x$

L'equazione è non omogenea.

L'equazione omogenea $y' = y$ ha per soluzione $y_o = Ce^{x}$.

Cerchiamo una soluzione particolare della non omogenea del tipo: $\tilde{y} = c_1 \sin x + c_2 \cos x$. Determiniamo c_1 e c_2 sostituendo nella (e).

$\tilde{y}' = c_1 \cos x - c_2 \sin x = c_1 \sin x + c_2 \cos x + \sin x$ da cui:

$(c_1 - c_2)\cos x - (c_2 + c_1 + 1)\sin x = 0$

$$\begin{cases} c_1 - c_2 = 0 \\ c_2 + c_1 + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_2 = c_1 \\ 2c_1 = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_2 = -\dfrac{1}{2} \\ c_1 = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \tilde{y} = -\frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x$$

La soluzione generale della (e) è allora data da : $y(x) = \tilde{y}(x) + y_o(x) = -\frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x + C\,e^x$.

(f) $y' = 2y + e^{2x}$

L'equazione è non omogenea.

L'equazione omogenea $y' = 2y$ ha per soluzione $y_o = C\,e^{2x}$.

Se si cercasse una soluzione particolare della non omogenea del tipo: $\tilde{y} = K\,e^{2x}$ con K costante non si troverebbe soluzione in questo caso.

Cerchiamo allora una soluzione particolare della non omogenea del tipo: $\tilde{y} = K(x)e^{2x}$.

Determiniamo la funzione *K(x)* sostituendo nella (f).

$\tilde{y}' = K'(x)e^{2x} + 2K(x)e^{2x} = 2K(x)e^{2x} + e^{2x}$ da cui:

$(K'(x) - 1)e^{2x} = 0 \quad \rightarrow \quad K'(x) = 1 \quad \rightarrow \quad K(x) = x \rightarrow \quad \tilde{y} = xe^{2x}$

La soluzione generale della 5 è allora data da : $y(x) = \tilde{y}(x) + y_o(x) = xe^{2x} + C\,e^{2x} = (x + C)e^{2x}$

(g) $\begin{cases} y' = 2y + (x-1) + x\sin x \\ y(0) = 0 \end{cases}$

L'equazione è non omogenea.

L'equazione omogenea $y' = 2y$ ha per soluzione $y_o = C\,e^{2x}$.

Essendo la (g) un'equazione **lineare** possiamo cercare una soluzione particolare della non omogenea del tipo:

$\tilde{y}(x) = \tilde{y}_1(x) + \tilde{y}_2(x)$

con $\tilde{y}_1(x), \tilde{y}_2(x)$ soluzioni particolari rispettivamente delle equazioni:

g.1 $y' = 2y + x - 1$ $\tilde{y}_1(x) = m\,x + q$ $\tilde{y}_1'(x) = m = 2(mx + q) + x - 1$ da cui sostituendo nella **g.1** $(2m + 1)\,x + 2q - 1 - m = 0$ $\begin{cases} 2m + 1 = 0 \\ 2q - 1 - m = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m = -\dfrac{1}{2} \\ q = \dfrac{1}{4} \end{cases}$ $\tilde{y}_1(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$	**g.2** $y' = 2y + x\sin x$ $\tilde{y}_2(x) = (a + bx)\sin x + (c + dx)\cos x$ $\tilde{y}_2'(x) = b\sin x + (a + bx)\cos x + d\cos x - (c + dx)\sin x$ da cui sostituendo nella **g.2** $b\sin x + (a + bx)\cos x + d\cos x - (c + dx)\sin x =$ $2[(a + bx)\sin x + (c + dx)\cos x] + x\sin x$ $(b - c - 2a)\sin x + (a + d - 2c)\cos x +$ $+ (-d - 2b - 1)x\sin x + (b - 2d)x\cos x = 0$ $\begin{cases} b - c - 2a = 0 \\ a + d - 2c = 0 \\ -d - 2b - 1 = 0 \\ b - 2d = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b - c - 2a = 0 \\ a + d - 2c = 0 \\ -d - 4d - 1 = 0 \\ b = 2d \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\dfrac{2}{5} - c - 2a = 0 \\ a - \dfrac{1}{5} - 2c = 0 \\ d = -\dfrac{1}{5} \\ b = -\dfrac{2}{5} \end{cases}$

	$\begin{cases} -\frac{2}{5}-c-\frac{2}{5}-4c=0 \\ a=\frac{1}{5}+2c \\ d=-\frac{1}{5} \\ b=-\frac{2}{5} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c=-\frac{4}{25} \\ a=-\frac{3}{25} \\ d=-\frac{1}{5} \\ b=-\frac{2}{5} \end{cases}$ Sostituendo i valori trovati si ottiene: $\tilde{y}_2(x)=-\left(\frac{3}{25}+\frac{2}{5}x\right)\sin x-\left(\frac{4}{25}+\frac{1}{5}x\right)\cos x$

Sostituendo, una soluzione particolare della non omogenea è data da:

$$\tilde{y}(x)=\tilde{y}_1(x)+\tilde{y}_2(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-\left(\frac{3}{25}+\frac{2}{5}x\right)\sin x-\left(\frac{4}{25}+\frac{1}{5}x\right)\cos x$$

e la soluzione generale della (g) è:

$$y(x)=\tilde{y}(x)+y_o(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-\left(\frac{3}{25}+\frac{2}{5}x\right)\sin x-\left(\frac{4}{25}+\frac{1}{5}x\right)\cos x+Ce^{2x}$$

A questo punto per determinare la costante C dobbiamo imporre la condizione iniziale $y(0)=0$:

$$y(0)=\frac{1}{4}-\frac{4}{25}+C=0 \quad \rightarrow \quad C=-\frac{9}{100}$$

La soluzione del problema di Cauchy **(g)** è pertanto:

$$y(x)=\tilde{y}(x)+y_o(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-\left(\frac{3}{25}+\frac{2}{5}x\right)\sin x-\left(\frac{4}{25}+\frac{1}{5}x\right)\cos x-\frac{9}{100}e^{2x}$$

(h) $y'=2y+3\cdot e^{\lambda x}$
L'equazione è non omogenea.
L'equazione omogenea $y'=2y$ ha per soluzione $y_o=C\,e^{2x}$.
Cerchiamo una soluzione particolare della non omogenea del tipo: $\tilde{y}=K(x)e^{2x}$.

Determiniamo la funzione *K(x)* sostituendo nella (h).

$\tilde{y}'=K'(x)e^{2x}+2K(x)e^{2x}=2K(x)e^{2x}+3\cdot e^{\lambda x}$ da cui:

$$K'(x)=3\cdot\frac{e^{\lambda x}}{e^{2x}}=3\cdot e^{(\lambda-2)x} \qquad ; \qquad K(x)=3\int e^{(\lambda-2)x}dx= \begin{cases} \rightarrow \quad \lambda=2 \quad \rightarrow \quad K(x)=3x+C' \\ \rightarrow \quad \lambda\neq 2 \quad \rightarrow \quad K(x)=\frac{3}{\lambda-2}e^{(\lambda-2)x}+C' \end{cases}$$

Di conseguenza:
$\lambda=2;\quad \tilde{y}(x)=K(x)e^{2x}=3xe^{2x}$
$\lambda\neq 2;\quad \tilde{y}(x)=K(x)e^{2x}=\frac{3}{\lambda-2}e^{(\lambda-2)x}e^{2x}=\frac{3}{\lambda-2}e^{\lambda x}$
La soluzione generale della (h) è allora data da :

$$\lambda=2;\quad y(x)=\tilde{y}(x)+y_o(x)=3xe^{2x}+C\,e^{2x}=(3x+C)e^{2x}$$

$$\lambda\neq 2;\quad y(x)=\tilde{y}(x)+y_o(x)=\frac{3}{\lambda-2}e^{\lambda x}+C\,e^{2x}$$