Correzione degli esercizi assegnati nella lezione del 12/02/16
a cura del Prof. Fernando D'Angelo.

1) Verificare che la funzione (1) $y(x)=x-\frac{1}{x}$ è una soluzione particolare dell'equazione (2) $xy'+y=2x$.

Soluzione. Derivando la (1) : $y'(x)=1+\frac{1}{x^2}$ e sostituendo nella (2) si ottiene un'identità:

$$xy'+y=2x \quad\rightarrow\quad x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)+x-\frac{1}{x}=2x \quad\rightarrow\quad x+\frac{1}{x}+x-\frac{1}{x}=2x \quad\rightarrow\quad 2x=2x$$

2) Verificare che la funzione (4) $y(x)=\sin x\cos x-\cos x$ risolve il problema di Cauchy:

$$(5)\qquad \begin{cases} y'+(tgx)\,y=\cos^2 x \\ y(0)=-1 \end{cases} \qquad x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

Soluzione. Innanzitutto verifichiamo la condizione iniziale: $y(0)=\sin 0\cos 0-\cos 0=-1$

Derivando la (4): $y'(x)=\cos x\cos x+\sin x(-\sin x)+\sin x=\cos^2 x-\sin^2 x+\sin x$ e sostituendo nella (5):

$$y'+(tgx)\,y=\cos^2 x \quad\rightarrow\quad \cos^2 x-\sin^2 x+\sin x+\frac{\sin x}{\cos x}(\sin x\cos x-\cos x)=\cos^2 x \quad\rightarrow$$
$$\cos^2 x-\sin^2 x+\sin x+\sin^2 x-\sin x=\cos^2 x \quad\rightarrow\quad \cos^2 x=\cos^2 x$$

si ottiene un'identità.

3) Per quali valori di r la funzione (6) $y(x)=e^{r\,x}$ è soluzione dell'equazione differenziale (7) $y''+y'-6y=0$?

Soluzione. Derivando la (6) $y'(x)=re^{r\,x}$, $y''(x)=r^2e^{r\,x}$ e sostituendo nella (7) si ottiene:

$$(8)\qquad \begin{array}{l} y''+y'-6y=0 \quad\rightarrow\quad r^2e^{r\,t}+re^{r\,t}-6e^{r\,t}=0 \quad\rightarrow\quad r^2+r-6=0 \quad\rightarrow\quad (r+3)(r-2)=0 \\ r_1=-3\,,\ r_2=2 \end{array}$$

4) Delle sottoelencate funzioni quale/quali è/sono soluzioni dell'equazione differenziale (9) $y''+2y'+y=0$?

a) $y=e^x$

b) $y=e^{-x}$

c) $y=xe^{-x}$

d) $y=x^2e^{-x}$

Soluzione. Sostituiamo nella (9) $y(x)=e^{r\,x}$, $y'(x)=re^{r\,x}$, $y''(x)=r^2e^{r\,x}$:

$$(10)\qquad \begin{array}{l} y''+2y'+y=0 \quad\rightarrow\quad r^2e^{r\,x}+2re^{r\,x}+e^{r\,x}=0 \quad\rightarrow\quad r^2+2r+1=0 \quad\rightarrow\quad (r+1)^2=0 \\ r_1=r_2=-1 \end{array}$$

Pertanto la funzione b) è senz'altro soluzione; però anche la funzione c) è soluzione; verifichiamo:

$$y(x)=xe^{-x}\,,\ y'(x)=e^{-x}+x\left(-e^{-x}\right)=(1-x)\,e^{-x}\,,\ y''(x)=-e^{-x}+(1-x)\left(-e^{-x}\right)=(x-2)\,e^{-x}$$

$$(11)\qquad y''+2y'+y=0 \quad\rightarrow\quad (x-2)e^{-x}+2(1-x)\,e^{-x}+xe^{-x}=0 \quad\rightarrow\quad x-2+2-2x+x=0 \quad\rightarrow\quad 0=0$$

Si può concludere che l'integrale generale della (9) è dato da:

$$(12)\qquad y=C_1e^{-x}+C_2x\,e^{-x}$$

5) Data l'equazione differenziale: (13) $y'=-y^2$

Soluzione.

i. Dedurre qualche proprietà delle soluzioni;

Dalla (13) si deduce che, escluso il caso in cui y è identicamente nulla, la derivata prima è negativa e dunque le soluzioni sono funzioni decrescenti.

ii. Verificare che (14) $y(x) = \frac{1}{x+C}$ è soluzione;

Derivando la (14) $y'(x) = -\frac{1}{(x+C)^2}$ e sostituendo nella (13) si ottiene:

$y' = -y^2 \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{(x+C)^2} = -\frac{1}{(x+C)^2}$ che è un'identità.

iii. Esistono soluzioni della (13) diverse da $y(x) = \frac{1}{x+C}$?

La (13) ammette anche la soluzione identicamente nulla $y(x) \equiv 0$. Tale soluzione non si ottiene dalla (14) per valori finiti della costante *C*. Si può pensare che la soluzione identicamente nulla si ottiene dalla (14) per $C = \infty$.

iv. Risolvere il problema di Cauchy : $\begin{cases} y' = -y^2 \\ y(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$

$y(0) = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{0+C} = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad C = 2$; pertanto la soluzione del problema di Cauchy è:

(15) $\qquad \tilde{y}(x) = \frac{1}{x+2}$ in $I = (-2\,, +\infty)$