Appunti della lezione del Prof. Stefano De Marchi del 19/02/16 a cura del Prof. Fernando D'Angelo.

Equazioni differenziali lineari del primo ordine.

Un'equazione differenziale lineare del primo ordine si scrive:

(31) $y'(x) = a(x) \cdot y(x) + b(x) \quad , \quad x \in I \quad , \quad I \subseteq R$

con $a(x), b(x)$ funzioni continue in *I*.

La soluzione della (31) sarà una funzione $y(x) \in C^1(I)$, cioè continua con derivata continua in *I*.

Il problema di Cauchy si scriverà nel modo seguente:

$$\begin{cases} y'(x) = a(x) \cdot y(x) + b(x) \\ y(x_0) = y_o \end{cases}$$

1° caso: equazione omogenea.

La (31) è un'equazione non omogenea. Se $b(x) \equiv 0$, si ottiene l'equazione omogenea:

(32) $y'(x) = a(x) \cdot y(x) \quad , \quad x \in I \quad , \quad I \subseteq R$.

Risolviamo analiticamente la (32).

(33) $\dfrac{y'(x)}{y(x)} = a(x)$

Integrando membro a membro:

(34) $\displaystyle\int \frac{y'(x)}{y(x)} dx = \int a(x)\, dx \quad \rightarrow \quad \ln|y(x)| = \int a(x)\, dx + C_o$

Posto $A(x) = \int a(x) dx$ ($A(x)$ è una primitiva di $a(x)$), la (34) diventa:

(35) $\ln|y(x)| = \int a(x)\, dx + C_o \quad \rightarrow \quad |y(x)| = e^{\int a(x)\, dx + C_o} = C\, e^{A(x)}$

in cui si è posto $C = e^{C_o}$.

Senza perdita di generalità si può omettere il valore assoluto e quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea è:

(36) $y(x) = C\, e^{A(x)}$

La costante arbitraria può essere precisata assegnando una condizione iniziale (problema di Cauchy).

Esempio 1.

(37) $y'(x) = -7y$

(38) $a(x) = -7 \quad \rightarrow \quad A(x) = \int a(x)\, dx = \int (-7)\, dx = -7x$

Dalla (36) la soluzione generale è data da:

(39) $y(x) = C\, e^{-7x}$

Esempio 2.

(40) $\begin{cases} y'(x) = -7y \\ y(0) = 1 \end{cases}$

La soluzione generale è data da (vedi esempio precedente):

(41) $y(x) = C\, e^{-7x}$

Pertanto:

$y(0) = C\, e^0 = 1 \quad \to \quad C = 1$

La soluzione del problema di Cauchy è pertanto:

(42) $\quad y(x) = e^{-7x}$

Esempio 3.

(43) $$\begin{cases} y'(x) = \sqrt{x} \cdot y \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

(44) $$a(x) = \sqrt{x} \quad \to \quad A(x) = \int a(x)\, dx = \int \sqrt{x}\, dx = \int x^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} + C_o = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C_o$$

Dalla (36) la soluzione generale della (43) è data da:

(45) $$y(x) = C\, e^{\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}}$$

A questo punto per trovare la soluzione del problema di Cauchy imponiamo la condizione iniziale:

(46) $\quad y(0) = 2 \quad \to \quad C = 2$.

La soluzione della (43) è allora:

(47) $$y(x) = 2\, e^{\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}}$$

Esercizi assegnati per la prossima lezione.

Risolvere le seguenti equazioni omogenee:

- **(a)** $y' = -\frac{4}{5} y$
- **(b)** $y' = \sin x \cdot y$
- **(c)** $y' = \frac{y}{1+x}$

2° caso: equazione non omogenea.

Teorema.

Data l'equazione differenziale del primo ordine non omogenea:

(48) $\quad y'(x) = a(x) \cdot y(x) + b(x) \quad , \quad x \in I \quad , \quad I \subseteq R$

In cui $a(x), b(x)$ sono funzioni continue in I. Sia $A(x)$ una primitiva di $a(x)$ in modo che la soluzione dell'equazione omogenea associata sia data da $y_o(x) = C\, e^{A(x)}$. Sia $\tilde{y}(x)$ una soluzione particolare dell'equazione non omogenea. La soluzione generale della (48) si scrive allora nel modo seguente:

(49) $\quad y(x) = \tilde{y}(x) + y_o(x) = \tilde{y}(x) + C\, e^{A(x)} \quad , \quad C \in R$

Dimostrazione.

Infatti, se $y(x)$ e $\tilde{y}(x)$ sono soluzioni della (48), posto $z(x) = y(x) - \tilde{y}(x)$ si ha:

$$z'(x) = y'(x) - \tilde{y}'(x) = a(x) \cdot y(x) + b(x) - a(x) \cdot \tilde{y}(x) - b(x) = a(x) \cdot (y(x) - \tilde{y}(x)) = a(x) \cdot z(x).$$

Si vede quindi che $z(x)$ è soluzione dell'equazione omogenea associata e dunque ottenibile dalla formula $C\,e^{A(x)}$. Da $z(x)=y(x)-\tilde{y}(x)$ si ottiene:

(50) $\quad y(x)=z(x)+\tilde{y}(x)=C\,e^{A(x)}+\tilde{y}(x)$

che è ciò che si voleva dimostrare.

Per risolvere un'equazione non omogenea si deve pertanto trovare la soluzione generale dell'omogenea associata (si può utilizzare la formula $y_o(x)=C\,e^{A(x)}$) e una soluzione particolare $\tilde{y}(x)$ della non omogenea.

Per trovare una soluzione particolare $\tilde{y}(x)$ dell'equazione non omogenea si può usare il "metodo della variazione della costante" (o di Lagrange) o i "metodi ad hoc" (o della somiglianza).

Vedremo negli esempi che seguono come si applicano tali metodi.

Metodo della variazione della costante.

Posto

(51) $\quad \tilde{y}(x)=K(x)\,e^{A(x)}$,

con $K(x)$ funzione incognita, andiamo a sostituire la (51) nella (48) per determinare $K(x)$.

Calcoliamo allora la derivata di $\tilde{y}(x)$:

(52) $\quad \tilde{y}'(x)=K'(x)\,e^{A(x)}+K(x)\,A'(x)\,e^{A(x)}=K'(x)\,e^{A(x)}+K(x)\,a(x)\,e^{A(x)}$ e sostituiamo:

(53) $\quad \tilde{y}'(x)=a(x)\tilde{y}(x)+b(x)\Rightarrow K'(x)\,e^{A(x)}+K(x)\,a(x)\,e^{A(x)}=a(x)\,K(x)\,e^{A(x)}+b(x)$ da cui

(54) $\quad K'(x)\,e^{A(x)}=b(x)$ e quindi in definitiva:

(55) $\quad K'(x)=b(x)\,e^{-A(x)}$

Dalla (55) si deduce che $K(x)$ è una primitiva di $b(x)\,e^{-A(x)}$ e dunque si può formalmente scrivere, utilizzando un integrale indefinito:

(56) $\quad K(x)=\int b(x)\,e^{-A(x)}dx$

Sostituendo la (56) nella (51) si ricava l'espressione della soluzione particolare della non omogenea:

(57) $\quad \tilde{y}(x)=K(x)\,e^{A(x)}=e^{A(x)}\int b(x)\,e^{-A(x)}dx$

Esempio 4.

(58) $\quad y'=-2y+3$

Si tratta di un'equazione differenziale a coefficienti costanti.

In questo caso con le notazioni precedenti:

$a(x)=-2 \quad \rightarrow \quad A(x)=-2x \quad \rightarrow \quad y_o(x)=C\,e^{-2x}$ soluzione della omogenea associata.

Posto:

(59) $\quad \tilde{y}(x)=K(x)\,e^{-2x}$,

sostituendo nella (58):

$\tilde{y}'(x)=K'(x)\,e^{-2x}+K(x)\,e^{-2x}(-2)=-2K(x)\,e^{-2x}+3 \quad \rightarrow \quad K'(x)\,e^{-2x}=3 \quad \rightarrow \quad K'(x)=3\,e^{2x}$ da cui:

$K(x)=\frac{3}{2}\,e^{2x}+C_o$. Se $C_o=0$ si ha la soluzione particolare:

(60) $K(x) = \frac{3}{2} e^{2x}$.

Sostituendo la (60) nella (59) si ottiene la soluzione particolare della non omogenea:

(61) $\tilde{y}(x) = K(x)\, e^{-2x} = \frac{3}{2} e^{2x}\, e^{-2x} = \frac{3}{2}$

In questo caso la soluzione particolare è semplicemente una costante! Si osservi che anche il termine che rende non omogenea l'equazione è costante.

La soluzione generale della (58) è allora data da:

(62) $y(x) = \tilde{y}(x) + y_o(x) = \frac{3}{2} + C\, e^{-2x} \quad , \quad C \in R$

Esempio 5.

(63) $y' = 2xy + x^2$

Si tratta di un'equazione differenziale a coefficienti variabili.

In questo caso con le notazioni precedenti:

$a(x) = 2x \quad \rightarrow \quad A(x) = \int 2x dx = x^2 + C' \quad \rightarrow \quad y_o(x) = C\, e^{x^2}$ soluzione della omogenea associata.

Posto:

(64) $\tilde{y}(x) = K(x)\, e^{x^2}$,

sostituendo nella (63):

$\tilde{y}'(x) = K'(x)\, e^{x^2} + K(x)\, e^{x^2}(2x) = 2x\, K(x)\, e^{x^2} + x^2 \quad \rightarrow \quad K'(x)\, e^{x^2} = x^2 \quad \rightarrow \quad K'(x) = x^2\, e^{-x^2}$ da cui:

(65) $K(x) = \int x^2\, e^{-x^2} dx$.

Questo integrale non può essere risolto in forma chiusa per cui lo lasceremo indicato.

Sostituendo la (65) nella (64) si ottiene la soluzione particolare della non omogenea:

(66) $\tilde{y}(x) = K(x)\, e^{x^2} = e^{x^2} \int x^2\, e^{-x^2} dx$

La soluzione generale della (63) è data da:

(67) $y(x) = \tilde{y}(x) + y_o(x) = e^{x^2} \int x^2\, e^{-x^2} dx + C\, e^{x^2} = \left(\int x^2\, e^{-x^2} dx + C\right) e^{x^2} \quad , \quad C \in R$

Metodi ad hoc.

Riprendiamo l'Esempio 4.

Esempio4.

(68) $y' = -2y + 3$

Osservato che il termine che rende non omogenea l'equazione è una costante, possiamo cercare una soluzione particolare della non omogenea che sia costante, cioè.

(69) $\tilde{y}(x) = C_o$

Determiniamo il valore della costante C_o sostituendo la (69) nella (68):

(70) $\tilde{y}'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = -2C_o + 3 \quad \rightarrow \quad C_o = \frac{3}{2} \quad \rightarrow \quad \tilde{y}(x) = \frac{3}{2}$.

Si confronti con la (61).

Esempio 6.

(71) $y' = 3y + 4x^3 + 2x^2 - x + 1$

Osservato che il termine che rende non omogenea l'equazione è una funzione polinomiale di terzo grado, possiamo cercare una soluzione particolare della non omogenea che sia dello stesso tipo, cioè:

(72) $\tilde{y}(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Essendo $\tilde{y}'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, sostituendo nella (71):

(73) $3ax^2 + 2bx + c = 3\left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right) + 4x^3 + 2x^2 - x + 1$ da cui:

$3ax^2 + 2bx + c = 3ax^3 + 3bx^2 + 3cx + 3d + 4x^3 + 2x^2 - x + 1$

$(3a + 4)\,x^3 + (3b + 2 - 3a)\,x^2 + (3c - 1 - 2b)\,x + 3d + 1 - c = 0$.

Dovendo essere il polinomio identicamente nullo, dobbiamo imporre che tutti i coefficienti siano nulli:

(74) $$\begin{cases} 3a + 4 = 0 \\ -3a + 3b + 2 = 0 \\ -2b + 3c - 1 = 0 \\ -c + 3d + 1 = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ricava la soluzione:

(75) $$\begin{cases} a = -\dfrac{4}{3} \\ b = -2 \\ c = -1 \\ d = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Pertanto la soluzione particolare della non omogenea è:

(76) $\tilde{y}(x) = -\dfrac{4}{3}x^3 - 2x^2 - x - \dfrac{2}{3}$.

La soluzione generale dell'omogenea associata:

(77) $y' = 3y$

è data da:

(78) $y_o(x) = C\,e^{3x}$

Possiamo allora scrivere la soluzione generale della (71):

(79) $y(x) = \tilde{y}(x) + y_o(x) = -\dfrac{4}{3}x^3 - 2x^2 - x - \dfrac{2}{3} + C\,e^{3x} \quad , \quad C \in R$

Osservazione.

Se avessimo voluto determinare la soluzione particolare della non omogenea $\tilde{y}(x)$ con il metodo della variazione delle costanti avremmo dovuto calcolare il seguente integrale indefinito:

(80) $K(x) = \int \left(4x^3 + 2x^2 - x + 1\right) e^{-3x} dx$.

Tale integrale si può calcolare "per parti". Il calcolo viene lasciato come esercizio.

Esercizi assegnati per la prossima lezione.

Risolvere le seguenti equazioni non omogenee:

(d) $y' = -4y + 3x + 1$

(e) $y' = y + \sin x$

(f) $y' = 2y + e^{2x}$

(g) $\begin{cases} y' = 2y + x - 1 + x \cdot \sin x \\ y(0) = 0 \end{cases}$

(h) $y' = 2y + 3 \cdot e^{\lambda x}$, $\lambda \in R$; discutere i casi $\lambda \neq 2$ e $\lambda = 2$