Appunti della lezione del Prof. Stefano De Marchi del 11/03/16 a cura del Prof. Fernando D'Angelo.

Soluzione di un esercizio assegnato nella scorsa lezione (esercizio h)

(81) $y' = 2y + 3\,e^{\lambda x}$

La soluzione generale dell'equazione associata è data da:

(82) $y_o(x) = C\,e^{2x}$

Osservato che il termine che rende non omogenea l'equazione è una funzione esponenziale, possiamo cercare una soluzione particolare della non omogenea che sia dello stesso tipo, cioè:

(82) $\tilde{y}(x) = \alpha\,e^{\lambda x}$

Essendo $\tilde{y}'(x) = \alpha\,\lambda\,e^{\lambda x}$, sostituendo nella (81) si ottiene:

(83) $\alpha\,\lambda\,e^{\lambda x} = 2\alpha\,e^{\lambda x} + 3\,e^{\lambda x}$ da cui:

(84) $\alpha\,\lambda = 2\alpha + 3$

(85) $\alpha\,(\lambda - 2) = 3$

(86) $se\ \lambda \neq 2 \quad \alpha = \dfrac{3}{\lambda - 2}$

Possiamo adesso scrivere la soluzione generale della (81):

(87) $y(x) = \tilde{y}(x) + y_o(x) = \dfrac{3}{\lambda - 2} e^{\lambda x} + C\,e^{2x} \quad , \quad C \in R \quad , \quad \lambda \neq 2$

Trattiamo adesso il caso particolare $\lambda = 2$:

(88) $y' = 2y + 3\,e^{2x}$

Cerchiamo una soluzione particolare della non omogenea del tipo:

(89) $\tilde{y}(x) = \beta\,x\,e^{2x}$

Essendo $\tilde{y}'(x) = \beta\,e^{2x} + 2\beta\,x\,e^{2x}$, sostituendo nella (88) si ottiene:

(90) $\beta\,e^{2x} + 2\beta\,x\,e^{2x} = 2\beta\,x\,e^{2x} + 3\,e^{2x}$ da cui:

(91) $\beta = 3$.

Allora la soluzione particolare della non omogenea è:

(92) $\tilde{y}(x) = 3x\,e^{2x}$

Possiamo scrivere la soluzione generale della (88):

(93) $y(x) = \tilde{y}(x) + y_o(x) = 3x\,e^{2x} + C\,e^{2x} = (3x + C)\,e^{2x} \quad , \quad C \in R$

Esempio 7.

(94) $y' = y + x\,e^{3x} + \cos x$

La soluzione generale dell'omogenea associata:

(95) $y' = y$

è data da:

(96) $y_o(x) = C\,e^{x}$

Essendo la (94) un'equazione lineare possiamo cercare una soluzione particolare della non omogenea del tipo:

(97) $\tilde{y}(x)=\tilde{y}_1(x)+\tilde{y}_2(x)$

con $\tilde{y}_1(x),\tilde{y}_2(x)$ soluzioni particolari rispettivamente delle equazioni:

(98) $y' = y + x\,e^{3x}$	(99) $y' = y + \cos x$
(100) $\tilde{y}_1(x)=\alpha\, x\, e^{3x} + \beta\, e^{3x}$	(101) $\tilde{y}_2(x)=\alpha \sin x + \beta \cos x$
$\tilde{y}_1'(x)=\alpha\, e^{3x} + 3\alpha\, x\, e^{3x} + 3\beta\, e^{3x} = (\alpha + 3\beta + 3\alpha\, x)\, e^{3x}$	$\tilde{y}_2'(x)=\alpha \cos x - \beta \sin x$
Sostituendo nella (98):	Sostituendo nella (99):
$(\alpha + 3\beta + 3\alpha\, x)\, e^{3x} = \alpha\, x\, e^{3x} + \beta\, e^{3x} + x\, e^{3x}$	$\alpha \cos x - \beta \sin x = \alpha \sin x + \beta \cos x + \cos x$
$\alpha + 2\beta + (2\alpha - 1)x = 0$	$(\alpha - \beta - 1)\cos x - (\beta + \alpha)\sin x = 0$
$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ 2\alpha - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \beta = -\frac{1}{4} \\ \alpha = \frac{1}{2} \end{cases}$	$\begin{cases} \alpha - \beta - 1 = 0 \\ \beta + \alpha = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2\beta = 1 \\ \alpha = -\beta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \beta = -\frac{1}{2} \\ \alpha = \frac{1}{2} \end{cases}$
Sostituendo i valori trovati nella (100) si ottiene:	Sostituendo i valori trovati nella (101) si ottiene:
(102) $\tilde{y}_1(x)=\frac{1}{2} x\, e^{3x} - \frac{1}{4} e^{3x} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) e^{3x}$	(103) $\tilde{y}_2(x)=\frac{1}{2}(\sin x - \cos x)$

Sostituendo le (102) , (103) nella (97) si ha:

(104) $\tilde{y}(x)=\tilde{y}_1(x)+\tilde{y}_2(x)=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{3x}+\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)$

e la soluzione generale della (94) è:

(105) $y(x)=\tilde{y}(x)+y_o(x)=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{3x}+\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)+C\,e^{x} \quad , \quad C\in R$

Equazioni differenziali del primo ordine a variabili separabili.

Un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili è del tipo:

(1) $y'(x) = g(x) \cdot h[y(x)]$

ove

$g : I \to R$
$h : J \to R$

sono funzioni definite in un sottointervallo di R

Osservazione. Se y_o è uno zero di *h[y]* allora la funzione $y(x) = y_o =$ *costante* è soluzione della (1).

Supposto invece $h[y] \neq 0$ la (1) può porsi nella forma:

(2) $\dfrac{y'(x)}{h[y(x)]} = g(x)$

Sia $G(x)$ una primitiva di $g(x)$, $G(x) = \int g(x)dx$ e $F(y)$ una primitiva di $\dfrac{1}{h(y)}$, $F(y) = \int \dfrac{1}{h(y)}dy$; allora se integriamo ambo i membri della (2) rispetto a x si ottiene:

(3) $\int \dfrac{y'(x)}{h[y(x)]}dx = \int g(x)dx$.

Essendo $y'(x)dx = \dfrac{dy}{dx}dx = dy$, si ha $\int \dfrac{y'(x)}{h[y(x)]}dx = \int \dfrac{1}{h(y)}dy = F(y)$ e la (3) diventa:

(4) $F(y) = G(x) + C$.

Se F è una funzione invertibile in $J' \subseteq J$ e se $G(x) + C \in F(J'), \forall x \in I' \subseteq I$ dalla (4) si può formalmente ricavare la soluzione della (1) usando la funzione inversa:

(5) $y = F^{-1}(G(x) + C)$

Esempio 1.

(6) $\begin{cases} y' = y^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$

(7) $y' = y^{\frac{1}{3}} \quad \to \quad y' y^{-\frac{1}{3}} = 1$

Integrando ambo i membri:

(8) $\int y' y^{-\frac{1}{3}}dx = \int 1dx$ ma essendo $y'dx = dy$ si ha anche:

(9) $\int y^{-\frac{1}{3}}dy = \int 1dx$.

Utilizzando le regole di integrazione si ottiene:

(10) $\dfrac{1}{-\frac{1}{3}+1} y^{-\frac{1}{3}+1} = x + C \quad \to \quad \dfrac{3}{2}y^{\frac{2}{3}} = x + C$ da cui:

(11) $y^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}(x+C) \quad \to \quad y = \left[\frac{2}{3}(x+C)\right]^{\frac{3}{2}}$

La condizione iniziale è $y(0)=0$ quindi sostituendo nella (11):

(12) $y(0)=0 \quad \to \quad \left[\frac{2}{3}(0+C)\right]^{\frac{3}{2}} = 0 \quad \to \quad C=0$ e quindi la soluzione della (6) è in definitiva:

(13) $y = \left[\frac{2}{3}x\right]^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}x\right)^3} = \frac{2}{3}x\sqrt{\frac{2}{3}x} \quad , \quad x \geq 0$

Quesiti.

a) esiste una soluzione della (6) definita in tutto R ?

b) la soluzione della (6) è unica ?

È facile rispondere al quesito b): la risposta è no; infatti anche la funzione identicamente nulla $y(x)\equiv 0$ è soluzione.

Per rispondere al quesito a) si osservi invece che la funzione definita a tratti:

(14) $y(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x\sqrt{\frac{2}{3}x} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & \quad\;\; x < 0 \end{cases}$

è soluzione della (6) in tutto R ed è ivi continua e derivabile infatti:

(15) $l^+ = \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{3}x\sqrt{\frac{2}{3}x} = 0 = y(0) = l^- = \lim_{x\to 0^-} 0$

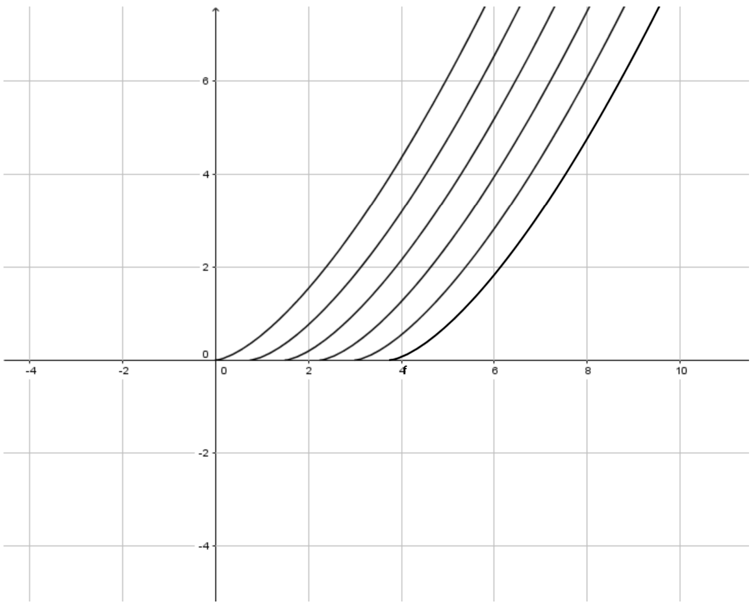
(16) $y'(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{x} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & \quad\;\; x < 0 \end{cases}$, essendo $y'^+ = \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{x} = 0 = y'^- = \lim_{x\to 0^-} 0$.

È inoltre facile verificare che anche la famiglia di funzioni $y_a(x) \in C^1(R)$:

(17) $y_a(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}(x-a)\sqrt{\frac{2}{3}(x-a)} & , \quad x \geq a \\ 0 & \quad\;\; x < a \end{cases}$

$\forall a \geq 0$

risolve il problema (6).



Il problema di Cauchy (6) infatti non soddisfa alle ipotesi del teorema che garantisce l'unicità della soluzione!!

Esempio 2.

(18) $\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Si verifichi che la soluzione è unica ed è data da:

(19) $y = \frac{1}{1-x} \quad , \quad x < 1$

in cui è necessario restringere il dominio con la condizione $x<1$ se vogliamo avere una soluzione di classe C^1 su un intervallo.

Vediamo.

(20) $y' = y^2 \quad \rightarrow \quad \dfrac{y'}{y^2} = 1 \quad , \quad y \neq 0$

Integrando ambo i membri:

(21) $\int \dfrac{y'}{y^2} dx = \int 1 dx$ ma essendo $y'dx = dy$ si ha anche:

(22) $\int y^{-2} dy = \int 1 dx$.

Utilizzando le regole di integrazione si ottiene:

(23) $\dfrac{1}{-2+1} y^{-2+1} = x + C \quad \rightarrow \quad -y^{-1} = x + C$ da cui:

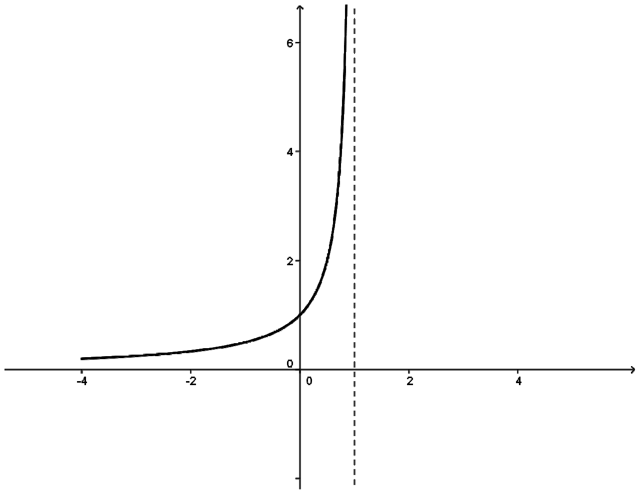
(24) $y = -\dfrac{1}{x+C}$

La condizione iniziale è $y(0) = 1$ quindi sostituendo nella (24):

(25) $y(0) = 1 \quad \rightarrow \quad -\dfrac{1}{0+C} = 1 \quad \rightarrow \quad C = -1$ e quindi la soluzione della (18) è in definitiva:

(26) $y = -\dfrac{1}{x-1} = \dfrac{1}{1-x} \quad , \quad x < 1$

Osservazione. Se vogliamo una soluzione di classe C^1 (cioè continua con derivata continua) in un intervallo dobbiamo restringere il dominio con la condizione x<1. La condizione x>1, a priori possibile, non contiene lo zero e quindi non è idonea a soddisfare la condizione iniziale del problema. Si osservi nella figura a lato il grafico della soluzione.



Esempio 3.

(27) $\begin{cases} y' = \dfrac{1}{1-y} = h(y) \\ \\ y(0) = a \end{cases}$

Determinare al variare di a l'intervallo massimale di esistenza della soluzione.
Osservazione.

Per $a \neq 1$ (il valore 1 è il punto in cui non è definita la funzione $h(y) = \dfrac{1}{1-y}$) esiste certamente una soluzione.

Per $a = 1$ non esiste una soluzione.

Ciò premesso,

(28) $y' = \dfrac{1}{1-y} \quad \rightarrow \quad (1-y)\, y' = 1$

Integrando ambo i membri:

(29) $\int (1-y)\, y' dx = \int 1 dx$ ma essendo $y'dx = dy$ si ha anche:

(30) $\int (1-y)\,dy = \int 1dx$.

Utilizzando le regole di integrazione si ottiene:

(31) $-\frac{1}{2}(1-y)^2 = x + C \quad \rightarrow \quad y(x) = 1 \pm \sqrt{C-2x}$

La condizione iniziale è $y(0) = a$ quindi sostituendo nella (31):

(32) $y(0) = a \quad \rightarrow \quad a = 1 \pm \sqrt{C - 2\cdot 0} \quad \rightarrow \quad C = (a-1)^2$

e quindi la soluzione della (27) è in definitiva:

(33) $y_a(x) = 1 \pm \sqrt{(a-1)^2 - 2x} = 1 \pm |a-1| \sqrt{1 - \frac{2x}{(a-1)^2}}$

Consideriamo la soluzione che si ottiene dalla (33) scegliendo il segno +:

(34) $y_a(x) = 1 + |a-1| \sqrt{1 - \frac{2x}{(a-1)^2}}$

Osservando che nella (34) quando $y_a \rightarrow 1$, $x \rightarrow \frac{1}{2}(a-1)^2$, l'intervallo massimale è

(35) $I_a = \left(-\infty\, , \frac{1}{2}(a-1)^2 \right)$.

Esempio 4.

(36) $\begin{cases} y' = \dfrac{2y^2}{1-x^2} \\ y(0) = 3 \end{cases}$

Verificare che l'unica soluzione è definita nell'intervallo massimale $I = (-1\,, \alpha)$ ove $\alpha = \frac{\sqrt[3]{e}-1}{\sqrt[3]{e}+1}$.

(37) $y' = \frac{2y^2}{1-x^2} \quad \rightarrow \quad \frac{y'}{y^2} = \frac{2}{1-x^2}$

Integrando ambo i membri:

(38) $\int \frac{y'}{y^2}\,dx = \int \frac{2}{1-x^2}\,dx$ ma essendo $y'dx = dy$ si ha anche:

(39) $\int \frac{1}{y^2}\,dy = \int \frac{2}{1-x^2}\,dx$.

Essendo $\frac{2}{1-x^2} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}$, la (39) si può riscrivere nel modo seguente:

(40) $\int \frac{1}{y^2}\,dy = \int \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right) dx = \int \frac{1}{1+x}\,dx + \int \frac{1}{1-x}\,dx$.

Utilizzando le regole di integrazione si ottiene:

(41) $-\frac{1}{y} = \ln|x+1| - \ln|1-x| + C \quad \rightarrow \quad y(x) = \frac{1}{\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right| + C}$

La condizione iniziale è $y(0) = 3$ quindi sostituendo nella (41):

$$(43)\quad y(0)=3 \quad\rightarrow\quad 3=\frac{1}{\ln\left|\frac{1-0}{1+0}\right|+C} \quad\rightarrow\quad 3=\frac{1}{C} \quad\rightarrow\quad C=\frac{1}{3}$$

e quindi la soluzione della (36) è in definitiva:

$$(44)\quad y(x)=\frac{1}{\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|+\frac{1}{3}}$$

La (44) è definibile a priori nell'insieme S soluzione del seguente sistema:

$$(45)\quad \begin{cases} \ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|+\frac{1}{3}\neq 0 \quad\rightarrow\quad \ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|\neq -\frac{1}{3} \quad\rightarrow\quad \left|\frac{1-x}{1+x}\right|\neq e^{(-1/3)} \quad\rightarrow\quad \left|\frac{1-x}{1+x}\right|\neq \frac{1}{\sqrt[3]{e}} \quad\rightarrow\quad \frac{1-x}{1+x}\neq\pm\frac{1}{\sqrt[3]{e}} \\ \left|\frac{1-x}{1+x}\right|>0 \quad\rightarrow\quad \frac{1-x}{1+x}\neq 0 \quad\rightarrow\quad 1-x\neq 0\wedge 1+x \quad\rightarrow\quad x\neq\pm 1 \end{cases}$$

$$\frac{1-x}{1+x}\neq\pm\frac{1}{\sqrt[3]{e}}\rightarrow(1-x)\sqrt[3]{e}\neq\pm(1+x)\rightarrow\sqrt[3]{e}-\sqrt[3]{e}\,x\neq\pm1\pm x\rightarrow\left(\sqrt[3]{e}\pm1\right)x\neq\sqrt[3]{e}\mp1\rightarrow x\neq\frac{\sqrt[3]{e}\mp1}{\sqrt[3]{e}\pm1}$$

Quindi l'insieme S soluzione della (45) è:

$$(46)\quad S=(-\infty,-1)\cup\left(-1,\frac{\sqrt[3]{e}-1}{\sqrt[3]{e}+1}\right)\cup\left(\frac{\sqrt[3]{e}-1}{\sqrt[3]{e}+1},1\right)\cup\left(1,\frac{\sqrt[3]{e}+1}{\sqrt[3]{e}-1}\right)\cup\left(\frac{\sqrt[3]{e}+1}{\sqrt[3]{e}-1},+\infty\right)$$

Osservato che la condizione iniziale della (36) richiede che 0 appartenga all'intervallo massimale, l'intervallo massimale è

$$(47)\quad I=\left(-1,\frac{\sqrt[3]{e}-1}{\sqrt[3]{e}+1}\right).$$

Esempio 5.

$$(48)\quad \begin{cases} y'=\frac{2y^2}{1-x^2} \\ y(0)=0 \end{cases}$$

Verificare che $y(x)\equiv 0$ (cioè la soluzione identicamente nulla) è l'unica soluzione in I = R.

Si lascia al lettore per esercizio.

Equazioni differenziali lineari del secondo ordine omogenee a coefficienti costanti.

Si tratta di equazioni del tipo:

(49) $ay''(x)+by'(x)+cy(x)=0 \quad , \quad a,b,c\in R \wedge a\neq 0$

Si cercano soluzioni del tipo:

(50) $y(x)=e^{\lambda x}$

con $\lambda\in R$.

Sostituiamo la (50) nella (49):

(51) $a\lambda^2 e^{\lambda x}+b\lambda e^{\lambda x}+ce^{\lambda x}=0$ da cui:

(52) $\left(a\lambda^2+b\lambda+c\right)e^{\lambda x}=0$ e quindi:

(53) $a\lambda^2+b\lambda+c=0$.

La (53) è detta equazione caratteristica. Essendo in questo caso un'equazione di secondo grado, dovremo considerare tre casi.

1° caso: $\Delta=b^2-4ac>0$

Si hanno due radici reali distinte λ_1, λ_2 e quindi due soluzioni:

(54) $y_1(x)=e^{\lambda_1 x} \quad , \quad y_2(x)=e^{\lambda_2 x}$

Quesito: sono tali soluzioni linearmente indipendenti?

Per rispondere dobbiamo introdurre il concetto di **indipendenza lineare**.

Dati *s* vettori x_1 , …, x_s , con $x_i\in R^n$, costruiamo la combinazione lineare $\sum_{i=1}^{s}\alpha_i x_i$ con $\alpha_i\in R$ costanti arbitrarie.

Definizione.

Si dice che i vettori x_1 , …, x_s sono linearmente *indipendenti* se l'equazione

(55) $\sum_{i=1}^{s}\alpha_i x_i=0$

ha come unica soluzione quella in cui ***tutte*** le costanti α_i sono nulle.

Osservazione.

I vettori $x_i\in R^n$ si possono ritenere ad esempio vettori *colonna* cioè matrici rettangolari aventi n righe e una sola colonna. Ad esempio: $\tilde{x}=\begin{pmatrix}1\\3\\0\\2\end{pmatrix}\in R^4$ è un vettore colonna (in questo caso 4 righe, 1 colonna).

Esempio 1.

Consideriamo i seguenti vettori appartenenti a R^2: $x_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $x_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

Scriviamo l'equazione (vedi la (55), in questo caso *s=2*):

(56) $\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2=0$,

in cui $0=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ è il vettore nullo in R^2.

La (56) si può riscrivere esplicitamente nel modo seguente:

(57) $\alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, da cui

(58) $\begin{pmatrix}\alpha_1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\\alpha_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases}\alpha_1=0\\\alpha_2=0\end{cases}.$

In base alla definizione, essendo la soluzione della (58) identicamente nulla (cioè tutte le costanti sono nulle) si può concludere che i vettori $x_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $x_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ sono linearmente ***indipendenti***.

Esempio 2.

Consideriamo i seguenti vettori appartenenti a R^2: $x_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $x_2=\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$.

Scriviamo l'equazione:

(59) $\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2=0$,

che si può riscrivere esplicitamente nel modo seguente:

(60) $\alpha_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, da cui

(61) $\begin{pmatrix}\alpha_1\\2\alpha_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\alpha_2\\-2\alpha_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}\alpha_1-\alpha_2\\2\alpha_1-2\alpha_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases}\alpha_1-\alpha_2=0\\2\alpha_1-2\alpha_2=0\end{cases} \rightarrow \alpha_1=\alpha_2 .$

In questo caso la (61) ammette infinite soluzioni (e non la sola soluzione in cui tutte le costanti sono nulle); pertanto in base alla definizione si può concludere che i vettori $x_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $x_2=\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$ sono linearmente ***dipendenti***.

Dopo questa parentesi torniamo al quesito che ci siamo posti nella pagina precedente.

Le soluzioni $y_1(x)=e^{\lambda_1 x}$, $y_2(x)=e^{\lambda_2 x}$ sono linearmente indipendenti?

Per stabilire se le soluzioni $y_1(x)=e^{\lambda_1 x}$, $y_2(x)=e^{\lambda_2 x}$ sono linearmente indipendenti invece di applicare in modo diretto la definizione si ricorre al *wronskiano* definito nel modo seguente:

(62) $W(x)=\begin{vmatrix}y_1(x) & y_2(x)\\y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}$

Il *wronskiano* in questo caso è il determinante di una matrice 2x2.

Se il *wronskiano* è diverso da zero possiamo affermare che le soluzioni sono linearmente indipendenti. Vediamo:

(63) $W(x)=\begin{vmatrix}y_1(x) & y_2(x)\\y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x}\\\lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x}\end{vmatrix}=e^{\lambda_1 x}\cdot\lambda_2 e^{\lambda_2 x}-e^{\lambda_2 x}\cdot\lambda_1 e^{\lambda_1 x}=(\lambda_2-\lambda_1)e^{(\lambda_1+\lambda_2)x}\neq 0$

essendo reali distinti λ_1 , λ_2 nel caso che stiamo trattando.

La soluzione generale della (1) nel caso $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ è in definitiva:

(64) $y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$.

2° caso: $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

Si hanno due radici reali coincidenti $\lambda_1 \equiv \lambda_2 = \lambda = -\dfrac{b}{2a}$ e quindi una soluzione è data da:

(65) $y_1(x) = e^{\lambda x}$.

Per trovare un'altra soluzione linearmente indipendente dalla (49) utilizziamo il metodo della variazione della costante. Cerchiamo allora una soluzione del tipo:

(66) $y_2(x) = K(x)\, e^{\lambda x}$,

con $K(x)$ funzione incognita. Andiamo a sostituire la (66) nella (49) per determinare $K(x)$.

Calcoliamo le derivate prima e seconda di $y_2(x)$:

(67) $y_2'(x) = K'(x)\, e^{\lambda x} + \lambda K(x)\, e^{\lambda x} = [K'(x) + \lambda K(x)]\, e^{\lambda x}$

(68) $y_2''(x) = K''(x)\, e^{\lambda x} + \lambda K'(x)\, e^{\lambda x} + \lambda K'(x)\, e^{\lambda x} + \lambda^2 K(x)\, e^{\lambda x} = [K''(x) + 2\lambda K'(x) + \lambda^2 K(x)]\, e^{\lambda x}$

e sostituiamo (66), (67) e (68) nella (49):

(69) $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0 \quad \rightarrow \quad a[K''(x) + 2\lambda K'(x) + \lambda^2 K(x)]\, e^{\lambda x} + b[K'(x) + \lambda K(x)]\, e^{\lambda x} + cK(x)\, e^{\lambda x} = 0$

da cui raccogliendo e semplificando:

(70) $aK''(x) + (2a\lambda + b)K'(x) + (a\lambda^2 + b\lambda + c)K(x) = 0$.

Essendo poi $2a\lambda + b = 0$ e $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, la (70) diventa:

(71) $aK''(x) = 0$ da cui, essendo per ipotesi $a \neq 0$, si ha:

(72) $K''(x) = 0$

Una soluzione particolare della (72) è senz'altro data da:

(73) $K(x) = x \quad \rightarrow \quad K'(x) = 1 \quad \rightarrow \quad K''(x) = 0$.

Sostituendo la (73) nella (66) otteniamo la soluzione:

(74) $y_2(x) = x\, e^{\lambda x}$.

Verifichiamo adesso con il calcolo del *wronskiano* che le due soluzioni $y_1(x) = e^{\lambda x}$, $y_2(x) = x\, e^{\lambda x}$ sono linearmente indipendenti.

(75) $W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\lambda x} & xe^{\lambda x} \\ \lambda e^{\lambda x} & e^{\lambda x} + \lambda xe^{\lambda x} \end{vmatrix} = e^{\lambda x} \cdot (e^{\lambda x} + \lambda xe^{\lambda x}) - xe^{\lambda x} \cdot \lambda e^{\lambda x} = e^{\lambda x} \neq 0$

Essendo il wronskiano diverso da zero le due soluzioni sono linearmente indipendenti.

3° caso: $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

Non ci sono radici reali. Le radici sono complesse coniugate: $\lambda_{1/2} = \omega \pm i\gamma$.

Le due soluzioni linearmente indipendenti sono date:

(76) $y_1(x) = e^{\lambda_1 x} = e^{(\omega - i\gamma)x} = e^{\omega x}[\cos(\gamma x) - i \sin(\gamma x)]$; $y_2(x) = e^{\lambda_2 x} = e^{(\omega + i\gamma)x} = e^{\omega x}[\cos(\gamma x) + i \sin(\gamma x)]$

Esercizi

1. $y''(x)+4y(x)=0$

L'equazione caratteristica è $\lambda^2+4=0 \quad \rightarrow \quad \lambda^2=-4 \quad \rightarrow \quad \lambda_{1/2}=\pm 2i$

$y_{1/2}(x)=e^{\lambda_{1/2}x}=e^{(\pm i2)x}=\cos(2x)\pm i\sin(2x)$

La soluzione generale della **1.** è data da:

$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)=C_1e^{-2ix}+C_2e^{2ix}=C_1[\cos(2x)-i\sin(2x)]+C_2[\cos(2x)+i\sin(2x)]$

2. $y''(x)-4y(x)=0$

L'equazione caratteristica è $\lambda^2-4=0 \quad \rightarrow \quad \lambda^2=4 \quad \rightarrow \quad \lambda_{1/2}=\pm 2$

$y_{1/2}(x)=e^{\lambda_{1/2}x}=e^{(\pm 2)x}$

La soluzione generale della 2. è data da:

$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}$

3. $y''(x)-3y'(x)+2y(x)=0$

L'equazione caratteristica è $\lambda^2-3\lambda+2=0 \rightarrow \quad \lambda_1=1 \quad , \quad \lambda_2=2$

$y_1(x)=e^{x} \quad , \quad y_2(x)=e^{2x}$

La soluzione generale della **3.** è data da:

$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)=C_1e^{x}+C_2e^{2x}$

4. $y''(x)+2y'(x)+5y(x)=0$

L'equazione caratteristica è $\lambda^2+2\lambda+5=0 \quad \rightarrow \quad \lambda=-1\pm\sqrt{1-5}=-1\pm 2i$

$y_1(x)=e^{-x-i2x}=e^{-x}e^{-i2x}=e^{-x}(\cos 2x-i\sin 2x) \quad , \quad y_2(x)=xe^{-x+i2x}=e^{-x}e^{+i2x}=e^{-x}(\cos 2x+i\sin 2x)$

La soluzione generale della **4.** è data da:

$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)=C_1e^{-x}(\cos 2x-i\sin 2x)+C_2e^{-x}(\cos 2x+i\sin 2x)$

5. $y''(x)+6y'(x)+9y(x)=0$

L'equazione caratteristica è $\lambda^2+6\lambda+9=0 \quad \rightarrow \quad (\lambda+3)^2=0 \quad , \quad \lambda_1\equiv\lambda_2=-3$

$y_1(x)=e^{-3x} \quad , \quad y_2(x)=xe^{-3x}$

La soluzione generale della 5. è data da:

$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)=C_1e^{-3x}+C_2xe^{-3x}=(C_1+C_2x)e^{-3x}$