Esempi di risoluzione di equazioni differenziali
a cura del Prof. Fernando D'Angelo.

Nella prima lezione abbiamo considerato l'equazione, detta **equazione logistica,** che è anche nota come **modello di Verhulst.**

(1) $$P'(t) = k\,P(t)\cdot\left(1-\frac{P(t)}{K}\right) \quad , \quad k>0, K>0$$

Per comodità riscriviamola nella forma:

(2) $$y'(x) = k\,y(x)\cdot\left(1-\frac{y(x)}{K}\right) \quad , \quad k>0, K>0$$

da cui, ponendo $A=\frac{k}{K}>0$, si ottiene:

(3) $$y'(x) = A\,y(x)\cdot(K-y(x)) \quad , \quad A>0, K>0$$

A questo punto del corso siamo in grado di risolverla separando le variabili.

Dalla (3):

(4) $$\frac{dy}{dx} = A\,y(x)\cdot(K-y(x))$$

(5) $$\frac{dy}{y\cdot(K-y)} = A\,dx$$

(6) $$\int\frac{dy}{y\cdot(K-y)} = A\int dx$$

Essendo:

(7) $$\frac{1}{y\cdot(K-y)} = \frac{\alpha}{y}+\frac{\beta}{K-y} = \frac{(-\alpha+\beta)y+\alpha K}{y\cdot(K-y)} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} \alpha K = 1 \\ -\alpha+\beta = 0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} \alpha = 1/K \\ \beta = 1/K \end{cases}$$

la (6) diventa:

(8) $$\frac{1}{K}\left(\int\frac{dy}{y}+\int\frac{dy}{K-y}\right) = A\,x + C''$$

(9) $$\ln|y| - \ln|K-y| = KA\,x + KC''$$

(10) $$\ln\left|\frac{y}{K-y}\right| = kx + KC''$$

(11) $$\left|\frac{y}{K-y}\right| = e^{k\,x+KC''}$$

(12) $$\frac{y}{K-y} = C'e^{kx} \text{ ove si è posto } C' = e^{KC''}$$

(13) $$y = (K-y)C'e^{k\,x}$$

(14) $$y = KC'e^{kx} - yC'e^{kx}$$

(15) $$y\left(1+C'e^{k\,x}\right) = KC'e^{k\,x}$$

(16) $$y=\frac{KC'e^{kx}}{1+C'e^{kx}}=\frac{KC'}{e^{-kx}+C'}=\frac{K}{\frac{1}{C'}e^{-kx}+1}=\frac{K}{1+Ce^{-kx}}$$ dove si è posto $\frac{1}{C'}=C$

Se imponiamo la condizione iniziale $y(0)=y_o$:

(17) $$y(0)=y_o=\frac{K}{1+C}\rightarrow y_o+y_oC=K\rightarrow y_oC=K-y_o\rightarrow C=\frac{K-y_o}{y_o}=\frac{K}{y_o}-1$$

Pertanto il problema di Cauchy ha per soluzione:

(18) $$y=\frac{K}{1+\left(\frac{K}{y_o}-1\right)e^{-kx}}$$

Risolvere l'equazione differenziale:

(1) $y' = -2y - 3x$

Soluzione.

L'equazione è non omogenea.

Sappiamo che l'equazione omogenea $y' = a(x)y$ ha per soluzione $y = C\,e^{A(x)}$, essendo $A(x)$ una primitiva di $a(x)$; pertanto la soluzione della omogenea $y' = -2y$ è $y_o = C\,e^{-2x}$.

Cerchiamo una soluzione particolare della non omogenea del tipo: $\tilde{y} = mx + q$.

Determiniamo m e q sostituendo nella (1).

$\tilde{y}' = m = -2(mx+q) - 3x$ da cui

$(3+2m)x + 2q + m = 0$. Annullando i coefficienti del polinomio:

$$\begin{cases} 3+2m=0 \\ 2q+m=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m=-\dfrac{3}{2} \\ q=\dfrac{3}{4} \end{cases} \rightarrow \tilde{y} = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}$$

La soluzione generale della (1) è allora data da : $y(x) = \tilde{y}(x) + y_o(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{4} + C\,e^{-2x}$

Risolvere il problema di Cauchy:

(2) $\begin{cases} y' = y - x + 1 + \cos x \\ y(0) = 1 \end{cases}$

L'equazione è non omogenea.
L'equazione omogenea $y' = y$ ha per soluzione $y_o = C\,e^{x}$.
Essendo la (2) un'equazione **lineare** possiamo cercare una soluzione particolare della non omogenea del tipo:

$\tilde{y}(x) = \tilde{y}_1(x) + \tilde{y}_2(x)$

con $\tilde{y}_1(x), \tilde{y}_2(x)$ soluzioni particolari rispettivamente delle equazioni:

2.1 $y' = y - x + 1$ $\tilde{y}_1(x) = mx + q$ da cui sostituendo nella **2.1** $\tilde{y}_1'(x) = m = mx + q - x + 1$ $(m-1)x + q + 1 - m = 0$ $\begin{cases} m-1=0 \\ q+1-m=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m=1 \\ q=0 \end{cases}$ $\tilde{y}_1(x) = x$	**2.2** $y' = y + \cos x$ $\tilde{y}_2(x) = a\sin x + b\cos x$ da cui sostituendo nella **2.2** $\tilde{y}_2'(x) = a\cos x - b\sin x = a\sin x + b\cos x + \cos x$ $(-b-a)\sin x + (a-b-1)\cos x = 0$ $\begin{cases} -b-a=0 \\ a-b-1=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b=-a \\ a+a-1=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b=-1/2 \\ a=1/2 \end{cases}$ Sostituendo i valori trovati si ottiene: $\tilde{y}_2(x) = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x$

Sostituendo, una soluzione particolare della non omogenea è data da:

$\tilde{y}(x) = \tilde{y}_1(x) + \tilde{y}_2(x) = x + \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x$

e la soluzione generale della (2) è:

$$y(x)=\tilde{y}(x)+y_o(x)=x+\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x+Ce^x$$

A questo punto per determinare la costante *C* dobbiamo imporre la condizione iniziale $y(0)=1$:

$$y(0)=-\frac{1}{2}+C=1 \quad \rightarrow \quad C=\frac{3}{2}$$

La soluzione del problema di Cauchy **(2)** è pertanto:

$$y(x)=\tilde{y}(x)+y_o(x)=x+\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x+\frac{3}{2}e^x$$

Risolvere l'equazione differenziale:

(3) $\qquad y''-6y'+9y=0$

Posto $y=e^{\lambda x}$, sostituendo nella (3) si ottiene l'equazione caratteristica:

$$\lambda^2-6\lambda+9=0$$

che ha due radici coincidenti $\lambda_1 \equiv \lambda_2 = 3$.

Si hanno in questo caso due soluzioni indipendenti e^{3x} e $x\cdot e^{3x}$ e pertanto la soluzione generale della (3) è:

$$y=C_1e^{3x}+C_2x\cdot e^{3x}$$

Risolvere il problema di Cauchy:

$$(4)\quad \begin{cases} y'=y^2-y \\ y(0)=-1 \end{cases}$$

Separiamo le variabili.

Dalla (4):

$$\frac{dy}{dx}=y^2-y$$

$$\frac{dy}{y\cdot(y-1)}=dx$$

(5) $$\int\frac{dy}{y\cdot(y-1)}=\int dx$$

Essendo:

$$\frac{1}{y\cdot(y-1)}=\frac{\alpha}{y}+\frac{\beta}{y-1}=\frac{(\alpha+\beta)y-\alpha}{y\cdot(y-1)} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -\alpha=1 \\ \alpha+\beta=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha=-1 \\ \beta=1 \end{cases}$$

La (5) diventa:

$$-\int\frac{dy}{y}+\int\frac{dy}{y-1}=x+C'$$

$$\ln|y-1|-\ln|y|=x+C'$$

$$\ln\left|\frac{y-1}{y}\right| = x + C'$$

$$\left|\frac{y-1}{y}\right| = e^{x+C'}$$

$$\frac{y-1}{y} = Ce^{x} \quad \text{ove si è posto } C = e^{C'}$$

$$y-1 = yCe^{x}$$

$$y\left(1-Ce^{x}\right) = 1$$

$$y = \frac{1}{1-Ce^{x}}$$

Se imponiamo la condizione iniziale $y(0) = -1$:

$$y(0) = -1 = \frac{1}{1-C} \to -1 + C = 1 \to C = 2$$

Pertanto il problema di Cauchy ha per soluzione:

$$y = \frac{1}{1-2\,e^{x}}$$