Corso di approfondimento di matematica: "Equazioni differenziali"

Appunti delle lezioni del 01/04/16 e del 21/04/16 a cura del Prof. Fernando D'Angelo.

Premessa - Metodi numerici

Oggi parleremo del metodo di Eulero.

Come detto nel primo incontro alcune equazioni differenziali non sono facili da risolvere.

Ad esempio:

- l'equazione $y'(x) = e^{-x^2}$ si risolve mediante sviluppi in serie;
- l'equazione $y'(x) = \dfrac{y-x}{y+x}$, che è del tipo $y'(x) = f(x, y(x))$, non è facile da risolvere analiticamente ma si può risolvere numericamente.

Il metodo di Eulero è il più semplice dei metodi numerici.

Considerato l'intervallo $I = [a,b]$ in cui si vuole risolvere l'equazione differenziale:

(1) $$y'(x) = f(x, y(x)) \quad ,$$

posto $x_o = a$, $x_N = b$, $h = \dfrac{x_N - x_o}{N}$,

la formula

(2) $$x_i = x_o + ih \quad , \quad i = 1,\dots, N-1$$

fornisce (*N-1)* nodi equispaziati nell'intervallo considerato.

Approssimiamo la derivata prima in un nodo con il rapporto incrementale:

(3) $$y'(x_i) \cong \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$$

in cui per brevità si sono introdotte le notazioni $y(x_{i+1}) = y_{i+1}$, $y(x_i) = y_i$.

Ma dalla (1)

(4) $$y'(x_i) \cong \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i) \text{ da cui:}$$

(5) $$y_{i+1} = y_i + h\, f(x_i, y_i) \quad i = 0,\dots, N-1$$

La (5) costituisce il metodo di ***Eulero esplicito***.

Esempio.

(6) $$\begin{cases} y'(x) = 3y(x) + x \\ y(x_0) = y_o \end{cases}$$

La formula (5) in questo caso diventa:

(7) $$y_{i+1} = y_i + h\, f(x_i, y_i) = y_i + h\,[3y_i + x_i] = (3h+1)y_i + hx_i \text{ da cui:}$$

(8) $$\begin{aligned} & y_1 = (3h+1)y_o + hx_o \qquad\qquad x_i = x_o + ih \\ & y_2 = (3h+1)y_1 + hx_1 \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & y_N = (3h+1)y_{N-1} + hx_{N-1} \end{aligned}$$

Si vede quindi che iterando è possibile calcolare i valori della soluzione in tutti i nodi.

Se al posto della (3) si calcola la derivata prima mediante la:

(9) $$y'(x_i) \cong \frac{y(x_i) - y(x_{i-1})}{h} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h}$$

la (5) diventa:

(10) $$y'(x_i) = \frac{y_i - y_{i-1}}{h} = f(x_i, y_i)$$ da cui:

(11) $$y_i = y_{i-1} + h\ f(x_i, y_i) \quad i = 1, \ldots, N$$

La (11) costituisce il metodo di ***Eulero implicito***.

In questo caso si usa l'aggettivo implicito perché ad ogni passo per ricavare il valore di y_i si deve adesso risolvere un'equazione. Vediamo di nuovo l'esempio precedente.

Esempio.

(12) $$\begin{cases} y'(x) = 3y(x) + x \\ y(x_0) = y_o \end{cases}$$

La formula (11) in questo caso diventa:

(13) $$y_i = y_{i-1} + h\ f(x_i, y_i) = y_{i-1} + h\left[3y_i + x_i\right] = y_{i-1} + 3hy_i + hx_i$$ da cui:

(14) $$y_i - 3hy_i = y_{i-1} + hx_i \quad \to \quad (1 - 3h)y_i = y_{i-1} + hx_i \quad \to \quad y_i = \frac{y_{i-1} + hx_i}{1 - 3h} \quad , \quad i = 1, \ldots, N$$

Si vede quindi che ad ogni passo si deve risolvere l'equazione (14) per ricavare y_i . In questo caso l'equazione è molto semplice in altri casi si deve ricorrere a metodi numerici per risolvere la (14).

Ci si può chiedere a questo punto perché utilizzare il metodo implicito che risulta in generale più oneroso. La risposta si trova considerando la convergenza e la stabilità dei due metodi.

Riprendiamo il considerazione il metodo di Eulero.

Consideriamo il problema di Cauchy:

(4) $$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_o \end{cases}$$

Discretizziamo l'intervallo $[a\,,b]$ introducendo *N-1* nodi equispaziati fra $a \equiv x_o$ e $b \equiv x_N$:

(5) $$a \equiv x_o, x_1\ , x_2, \dots x_{n-1}, x_N \equiv b \quad , \quad h = \frac{x_N - x_o}{N}.$$

Indicheremo con *y* la soluzione la soluzione del problema (4) e con *u* la soluzione numerica approssimata.

Useremo nel seguito le comode notazioni:

(5) $$\begin{aligned} &y(x_{n+1}) = y_{n+1}\ , y(x_n) = y_n \\ &u(x_{n+1}) = u_{n+1}\ , u(x_n) = u_n \\ &f_n = f(x_n, u(x_n)) = f(x_n, u_n) \end{aligned}$$

Nel metodo di Eulero esplicito si usa la seguente approssimazione:

(6) $$y'(x_n) \cong \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} = \frac{y_{n+1} - y_n}{h}$$

Tale approssimazione vale anche per la soluzione numerica per cui dalla (4):

(7) $$\frac{u_{n+1} - u_n}{h} = f_n$$

e in definitiva si ottiene il metodo di Eulero esplicito (EE):

(8) $$\begin{aligned} &u_{n+1} = u_n + h\ f(x_n, u_n) \quad n = 0, \dots, N-1 \\ &u_o = y_o \end{aligned}$$

Esempio.

Consideriamo il problema di Cauchy nell'intervallo $[0\,,1]$:

(8) $$\begin{cases} y'(x) = 5xy \\ y(0) = y_o = 1 \end{cases}$$

Consideriamo nell'intervallo $[0\,,1]$ 4 nodi equispaziati (in questo caso *N*=*5*):

(9) $$0 \equiv x_o, x_1 = \frac{1}{5}, x_2 = \frac{2}{5}, x_3 = \frac{3}{5}, x_4 = \frac{4}{5}, x_5 = 1 \equiv b \quad , \quad h = \frac{x_5 - x_o}{5} = \frac{1}{5}$$

Costruiamo la soluzione numerica:

(10) $$\begin{aligned} &u_o = 1 \\ &u_1 = u_o + h\ f(x_o, u_o) = 1 + \frac{1}{5} \cdot 0 = 1 \\ &u_2 = u_1 + h\ f(x_1, u_1) = 1 + \frac{1}{5} \cdot 5 \cdot \frac{1}{5} \cdot 1 = 1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5} = 1.2 \\ &u_3 = u_2 + h\ f(x_2, u_2) = \frac{6}{5} + \frac{1}{5} \cdot 5 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{6}{5} = \frac{6}{5} + \frac{12}{25} = \frac{42}{25} = 1.68 \end{aligned}$$

$$u_4 = u_3 + h\ f(x_3, u_3) = \frac{42}{25} + \frac{1}{5} \cdot 5 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{42}{25} = \frac{42}{25} + \frac{126}{125} = \frac{336}{125} = 2.688$$

$$u_5 = u_4 + h\ f(x_4, u_4) = \frac{336}{125} + \frac{1}{5} \cdot 5 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{336}{125} = \frac{336}{125} + \frac{1344}{625} = \frac{3024}{625} = 4.8384$$

Per il problema (8) è facile ricavare la soluzione analitica separando le variabili e integrando:

(11) $$y' = 5xy \quad \rightarrow \quad \frac{y'}{y} = 5x \quad \rightarrow \quad \int \frac{y'}{y} dy = \int 5x dx \quad \rightarrow \quad \ln|y| = \frac{5}{2}x^2 + C \quad \rightarrow \quad y = K\ e^{\frac{5}{2}x^2}$$

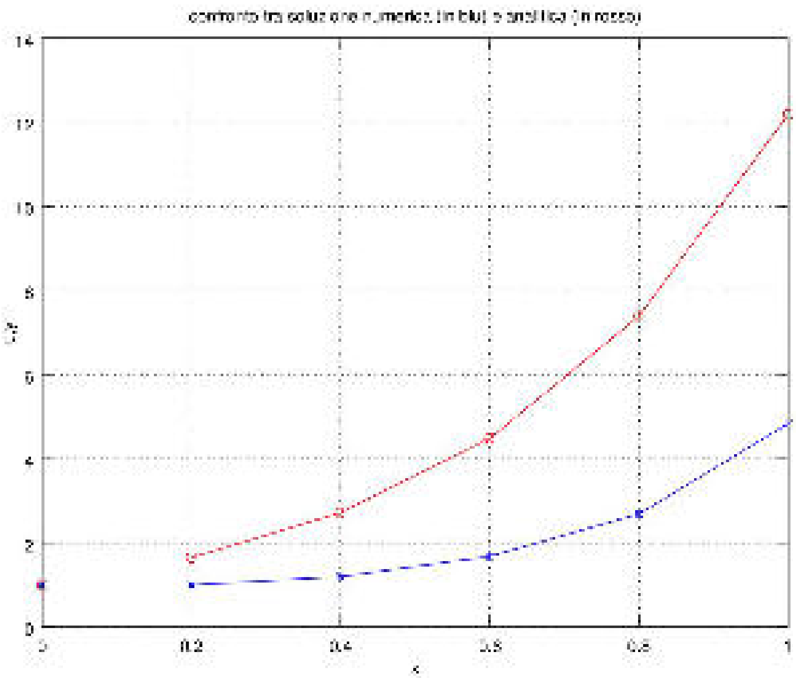
Per determinare la costante K imponiamo la condizione iniziale:

(12) $$y(0) = 1 = K\ e^0 \quad \rightarrow \quad K = 1.$$

La soluzione analitica del problema di Cauchy è pertanto:

(13) $$y = e^{\frac{5}{2}x^2}$$

Confrontiamo la soluzione numerica con la soluzione analitica calcolando la soluzione analitica nei nodi (9), osservando il grafico sottostante:



Si vede che, a causa del numero ridotto dei nodi, le due soluzioni sono abbastanza diverse.

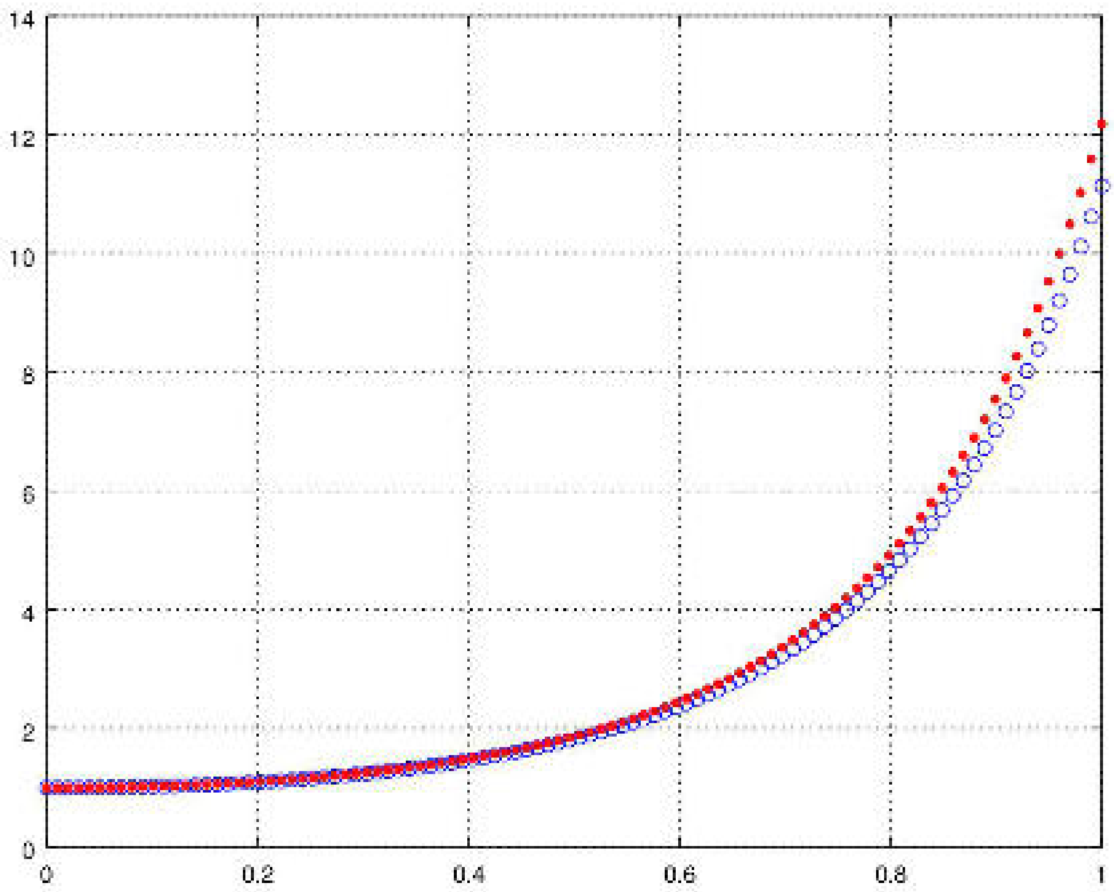
Aumentando il numero di nodi la soluzione approssimata si “avvicina” a quella esatta. Vedremo questo aspetto in laboratorio con Octave.

Il metodo di Eulero con Octave.

```
>> function yp=f(x,y)
yp=5*x.*y;
end
>> N=100;
>> x=linspace(0,1,N);
>> u(1)=1;
```

```
>> h=1/N;
>> for i=1:N-1
u(i+1)=u(i)+h*f(x(i),u(i));
end
>> z=exp(2.5*x.^2);
>> plot(x,u,"bo",x,z,"r.")
>>
```

In rosso la soluzione esatta, in blu la soluzione numerica.



Esempi di risoluzione di equazioni differenziali
a cura del Prof. Fernando D'Angelo.

Nella prima lezione abbiamo considerato l'equazione, detta **equazione logistica,** che è anche nota come **modello di Verhulst.**

(1) $P'(t) = k\,P(t)\cdot\left(1-\frac{P(t)}{K}\right) \quad , \quad k>0, K>0$

Per comodità riscriviamola nella forma:

(2) $y'(x) = k\,y(x)\cdot\left(1-\frac{y(x)}{K}\right) \quad , \quad k>0, K>0$

da cui, ponendo $A=\frac{k}{K}>0$, si ottiene:

(3) $y'(x) = A\,y(x)\cdot(K-y(x)) \quad , \quad A>0, K>0$

A questo punto del corso siamo in grado di risolverla separando le variabili.

Dalla (3):

(4) $\frac{dy}{dx} = A\,y(x)\cdot(K-y(x))$

(5) $\frac{dy}{y\cdot(K-y)} = A\,dx$

(6) $\int\frac{dy}{y\cdot(K-y)} = A\int dx$

Essendo:

(7) $\frac{1}{y\cdot(K-y)} = \frac{\alpha}{y}+\frac{\beta}{K-y} = \frac{(-\alpha+\beta)y+\alpha K}{y\cdot(K-y)} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha K = 1 \\ -\alpha+\beta = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha = 1/K \\ \beta = 1/K \end{cases}$

la (6) diventa:

(8) $\frac{1}{K}\left(\int\frac{dy}{y}+\int\frac{dy}{K-y}\right) = A\,x + C''$

(9) $\ln|y| - \ln|K-y| = KA\,x + KC''$

(10) $\ln\left|\frac{y}{K-y}\right| = kx + KC''$

(11) $\left|\frac{y}{K-y}\right| = e^{k\,x+KC''}$

(12) $\frac{y}{K-y} = C'e^{kx}$ ove si è posto $C' = e^{KC''}$

(13) $y = (K-y)C'e^{k\,x}$

(14) $y = KC'e^{kx} - yC'e^{kx}$

(15) $y\left(1+C'e^{k\,x}\right) = KC'e^{k\,x}$

(16) $$y=\frac{KC'e^{kx}}{1+C'e^{kx}}=\frac{KC'}{e^{-kx}+C'}=\frac{K}{\frac{1}{C'}e^{-kx}+1}=\frac{K}{1+Ce^{-kx}}$$ dove si è posto $\frac{1}{C'}=C$

Se imponiamo la condizione iniziale $y(0)=y_o$:

(17) $$y(0)=y_o=\frac{K}{1+C}\rightarrow y_o+y_oC=K\rightarrow y_oC=K-y_o\rightarrow C=\frac{K-y_o}{y_o}=\frac{K}{y_o}-1$$

Pertanto il problema di Cauchy ha per soluzione:

(18) $$y=\frac{K}{1+\left(\frac{K}{y_o}-1\right)e^{-kx}}$$

Attività proposta:

in ambiente Geogebra creare 3 slider per i parametri k, K, y_o e osservare come cambia il grafico della funzione.

Si osservi in particolare l'andamento asintotico:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{K}{1+\left(\frac{K}{y_o}-1\right)e^{-kx}}=K$$