TERNE PITAGORICHE

[Luigi Salce, Vicenza, 9 Febbraio 2011]

GLI ATTREZZI

Dei tre argomenti progettati quello delle terne pitagoriche ha bisogno delle nozioni più elementari di teoria delle matrici. Infatti, nella nostra "cassetta degli attrezzi" dovremo avere a disposizione, oltre ad un po' di geometria del piano cartesiano, solo alcune semplici nozioni di aritmetica matriciale.

Consideriamo le matrici 3x3:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ci serve sapere:

- come si effettua la moltiplicazione tra matrici "righe per colonne "; che tale moltiplicazione gode della proprietà associativa e che la matrice I, detta matrice identità, è l'elemento neutro rispetto alla moltiplicazione
- come calcolare l'inversa A^{-1} di una matrice A, cioè la matrice tale che $A^{-1}A = A\,A^{-1} = I$, nonché l'inversa di un prodotto: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- che la pre-moltiplicazione di una matrice (risp., post-moltiplicazione) per la matrice P ha l'effetto di scambiare tra di loro le prime due righe (risp., colonne) della matrice
- che la pre-moltiplicazione di una matrice per la matrice diagonale D_1 (risp., D_2, D_3) ha l'effetto di moltiplicare la prima riga (risp., seconda riga, terza riga) della matrice per -1
- che la post-moltiplicazione per la matrice diagonale D_1 (risp., D_2, D_3) ha l'effetto di moltiplicare la prima colonna (risp., seconda colonna, terza colonna) di una matrice per -1.

DEFINIZIONI

Ricordiamo che una terna pitagorica (TP) è una terna di numeri interi positivi (x,y,z) tali che

$$x^2 + y^2 = z^2 .$$

La terna pitagorica (x,y,z) è detta primitiva (TPP) se il massimo comune divisore dei tre numeri è 1: MCD(x,y,z)=1; ciò equivale a dire che MCD(x,y)=1, oppure MCD(x,z)=1, oppure MCD(y,z)=1.

Se (x,y,z) è una TP, anche (kx,ky,kz) lo è, per ogni intero $k \geq 1$, e diremo che tale terna è multipla della prima. Viceversa, se (kx,ky,kz) è una TP e MCD(x,y,z)=1, allora (x,y,z) è una TPP.

Una TP (x,y,z) è identificata non appena si conoscono x ed y. Quindi, nel piano cartesiano, sulla semiretta per l'origine e per il punto (x,y) di ascissa x e ordinata y, ci stanno tutti i punti del tipo (kx,ky); pertanto tutte le TP multiple di una TPP data danno luogo a infiniti punti su una semiretta per l'origine, di cui il primo è quello realtivo alla TPP.

Useremo per le TPP la notazione vettoriale: la terna (x,y,z) sarà denotata con

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

in modo da poter essere pre-moltiplicata per matrici 3x3.

MATRICI GENERATRICI E LORO INVERSE

Per ottenere tutte le TTP useremo tre matrici speciali, di cui la prima e la terza si ottengono dalla seconda semplicemente cambiando di segno a prima e seconda colonna, rispettivamente:

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Chiameremo B matrice <u>bassa</u>, M matrice <u>media</u>, A matrice <u>alta;</u> il motivo di questi nomi sarà chiaro fra poco. Si noti che:

$$B = M\,D_1 \quad \text{e} \qquad A = M\,D_2.$$

Eseguendo la moltiplicazione righe per colonne si trova che

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix} = I$$

quindi $$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix} .$$

Si noti che $M^{-1} = D_3\,M\,D_3$. Possiamo a questo punto calcolare:

$$B^{-1} = (M\,D_1)^{-1} = D_1^{-1}M^{-1} = D_1\,M^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix} = D_1\,D_3\,M\,D_3$$

$$A^{-1} = (M\,D_2)^{-1} = D_2^{-1}M^{-1} = D_2\,M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix} = D_2\,D_3\,M\,D_3$$

Quindi tutte le matrici B, A, M^{-1}, B^{-1} ed A^{-1} si possono ottenere da M pre-moltiplicandola e post-moltiplicandola opportunamente per le matrici D_1, D_2 e D_3.

MOLTIPLICAZIONE DI TPP PER LE MATRICI GENERATRICI

Le TPP con i più piccoli numeri interi sono

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

che chiameremo terne progenitrici. Si noti che $P\cdot\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$.

FATTO I. Se $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ è una TPP, anche $B\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $M\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ e $A\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ lo sono.

Dimostrazione. Esaminiamo prima come opera la matrice media M.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2y+2z \\ 2x+y+2z \\ 2x+2y+3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 &= (x+2y+2z)^2 + (2x+y+2z)^2 \\ &= x^2+4y^2+4z^2+4xy+4xz+8yz + 4x^2+y^2+4z^2+4xy+8xz+4yz \\ &= 5x^2+5y^2+8z^2+8xy+12xz+12yz \\ &= 4x^2+4y^2+9z^2+8xy+12xz+12yz = (2x+2y+3z)^2 = z'^2 \end{aligned}$$

Abbiamo quindi visto che anche (x',y',z') è una TP. Dobbiamo provare che è una terna primitiva. Naturalmente

$$M\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad\leftrightarrow\quad M^{-1}\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad \text{ovvero}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'+2y'-2z' \\ 2x'+y'-2z' \\ -2x'-2y'+3z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

perciò se k divide x', y' e z', allora k divide anche x, y e z, quindi k = 1; ne consegue che MCD(x',y',z') = 1 e (x',y',z') è una TPP .

Esaminiamo ora il caso della matrice bassa $B = M\,D_1$.

Poiché $M\,D_1 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} -x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, risulta:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x+2y+2z \\ -2x+y+2z \\ -2x+2y+3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

Tenuto conto che $z^2 = x^2+y^2$, è immediato verificare che x', y' e z' sono positivi. Risulta inoltre

$$\begin{aligned} x'^2+ y'^2 &= (-x+2y+2z)^2 + (-2x+y+2z)^2 \\ &= x^2+4y^2+4z^2-4xy-4xz+8yz + 4x^2+y^2+4z^2-4xy-8xz+4yz \\ &= 5x^2+5y^2+8z^2-8xy-12xz+12yz \\ &= 4x^2+4y^2+9z^2-8xy-12xz+12yz = (-2x+2y+3z)^2 = z'^2 \end{aligned}$$

quindi (x',y',z') è una TP. Analogamente a prima:

$$M\,D_1 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad \leftrightarrow \quad D_1 M^{-1} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad \text{ovvero}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x'-2y'+2z' \\ 2x'+y'-2z' \\ -2x'-2y'+3z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

perciò se k divide x', y' e z', allora k divide anche x, y e z, quindi k = 1; ne consegue che MCD(x',y',z') = 1 e (x',y',z') è una TPP.

Esaminiamo infine il caso della matrice alta $A = M\,D_2$.

Poiché $M\,D_2 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x \\ -y \\ z \end{bmatrix}$, risulta:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ -y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-2y+2z \\ 2x-y+2z \\ 2x-2y+3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

Tenuto conto che $z^2 = x^2+y^2$, è immediato verificare che x', y' e z' sono positivi. Risulta inoltre

$$\begin{aligned} x'^2+ y'^2 &= (x-2y+2z)^2 + (2x-y+2z)^2 \\ &= x^2+4y^2+4z^2-4xy+4xz-8yz + 4x^2+y^2+4z^2-4xy+8xz-4yz \\ &= 5x^2+5y^2+8z^2-8xy+12xz-12yz \\ &= 4x^2+4y^2+9z^2-8xy+12xz-12yz = (2x-2y+3z)^2 = z'^2 \end{aligned}$$

quindi (x',y',z') è una TP. Analogamente a prima:

$$M\,D_2\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\end{bmatrix}\quad\leftrightarrow\quad D_2\,M^{-1}\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\qquad \text{ovvero}$$

$$\begin{bmatrix}1&2&-2\\-2&-1&2\\-2&-2&3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'+2y'-2z'\\-2x'-y'+2z'\\-2x'-2y'+3z'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$

perciò se k divide x', y' e z', allora k divide anche x, y e z, quindi k = 1; ne consegue che MCD(x',y',z') = 1 e (x',y',z') è una TPP. ///

ESEMPIO

$$\begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix}:\qquad A\begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\12\\13\end{bmatrix}\qquad M\begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}21\\20\\29\end{bmatrix}\qquad B\begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15\\8\\17\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}4\\3\\5\end{bmatrix}:\qquad A\begin{bmatrix}4\\3\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\15\\17\end{bmatrix}\qquad M\begin{bmatrix}4\\3\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20\\21\\29\end{bmatrix}\qquad B\begin{bmatrix}4\\3\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12\\5\\13\end{bmatrix}$$

Si noti che B, A ed M sono legate tramite la matrice P nel modo seguente:

$$BP = PA \qquad e \qquad PM = MP.$$

Ciò comporta che per le TPP dell'Esempio risulti:

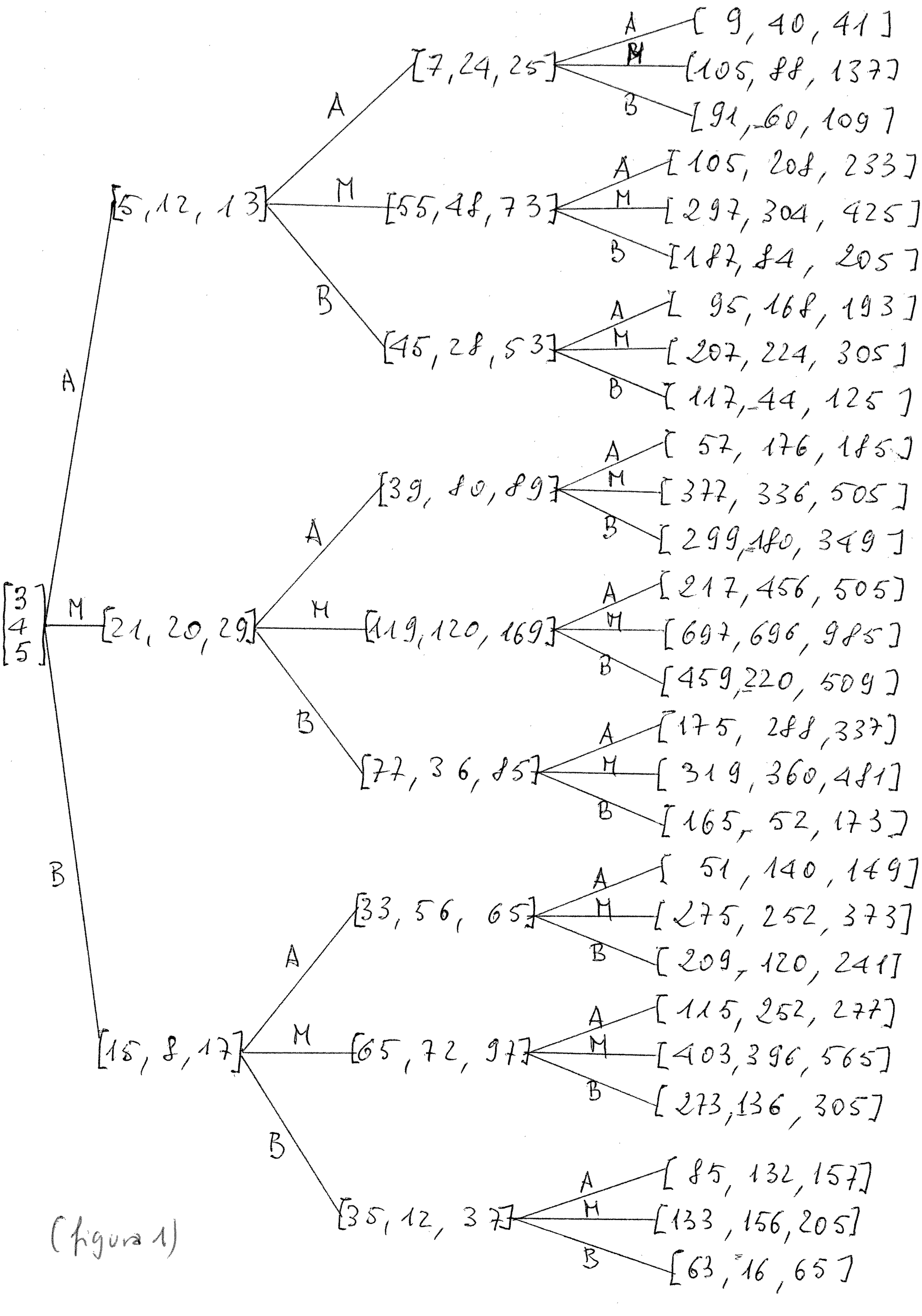
$$PA\cdot\begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix}=P\cdot\begin{bmatrix}5\\12\\13\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12\\5\\13\end{bmatrix}=B\cdot\begin{bmatrix}4\\3\\5\end{bmatrix}=BP\begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix}$$

$$PM\cdot\begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix}=P\cdot\begin{bmatrix}21\\20\\29\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20\\21\\29\end{bmatrix}=M\begin{bmatrix}4\\3\\5\end{bmatrix}=MP\begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix}.$$

Moltiplicando le 3 terne ottenute ancora per le 3 matrici generatrici, si ottengono 9 matrici; moltiplicando queste se ne ottengono 27. Così continuando, si ottengono due alberi "tripartiti", ciascuno col primo nodo in una delle due terne progenitrici (3,4,5) e (4,3,5), e che ad ogni terna si tripartiscono moltiplicando la terna per le tre matrici generatrici B, M ed A (fig. 1)

I due alberi, disegnati nel primo quadrante del piano cartesiano, risultano simmetrici rispetto alla diagonale, perché la terna (x,y,z), originata dalla terna progenitrice (3,4,5), corrisponde alla terna (y,x,z), originata dalla terna progenitrice (4,3,5), scambiando tra di loro le matrici A e B.

INIZIO DELL'ALBERO TRIPARTITO DELLE TPP



(figura 1)

OGNI TPP APPARTIENE AD UNO DEI DUE ALBERI GENERATI DALLE TPP PROGENITRICI

Suddividiamo il primo quadrante del piano cartesiano, privato dei due semiassi e delle due semirette di coefficiente angolare 4/3 e 3/4, in tre regioni aperte (figura 2)

A	= regione alta:	$\{ (x,y) \mid y/x > 4/3 \}$
M	= regione media:	$\{ (x,y) \mid 4/3 > y/x > 3/4 \}$
B	= regione bassa:	$\{ (x,y) \mid 3/4 > y/x \}$.

Si noti che: $12/5 > 4/3$ e $15/8 > 4/3$ $\rightarrow$ (5,12,13) e (8,15,17) stanno in A
$4/3 > 20/21 > 3/4$ e $4/3 > 21/20 > 3/4$ $\rightarrow$ (21,20,29) e (20,21,29) stanno in M
$3/4 > 8/15$ e $3/4 > 5/12$ $\rightarrow$ (15,8,17) e (12,5,13) stanno in B.

FATTO II. Ogni TTP si ottiene pre-moltiplicando ripetutamente in modo opportuno per le matrici A, M e B una delle due terne progenitrici (ovvero, ogni TTP appartiene ad uno dei due alberi da esse generati).

Dimostrazione. Sia (x,y,z) una TPP. L'idea per dimostrare il Fatto II consiste nel cercare un percorso all'indietro, univocamente individuato dalla TPP, che partendo da (x,y,z) conduca ad una delle due terne progenitrici. Volendo percorrere un cammino all'indietro, bisognerà moltiplicare per le matrici inverse A^{-1}, M^{-1}, B^{-1}. Procediamo in due passi.

1° Passo. Sia (x,y,z) una TPP non progenitrice. Pre-moltiplicandola per le tre matrici A^{-1}, M^{-1}, B^{-1} si ottengono terne del tipo (x',y',z') tali che:

- $x' < x$ e $y' < y$, con x' e y' numeri interi non nulli
- $z' > 0$
- $x'^2 + y'^2 = z'^2$
- $MCD(x',y',z') = 1$.

Quindi si ottengono terne in tutto simili alle TTP, tranne che i primi due coefficienti x' e y' possono essere negativi e sono comunque minori di x e y.

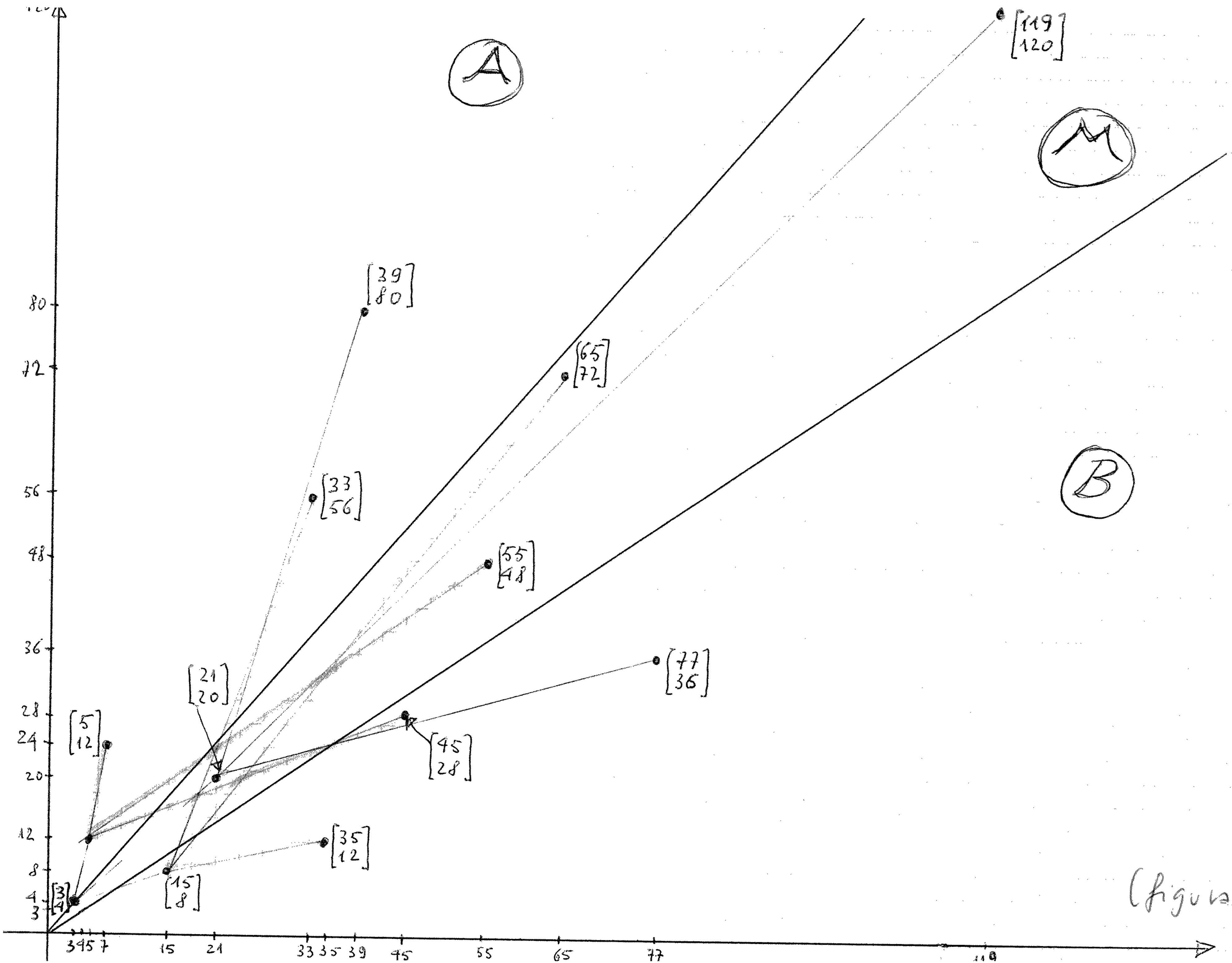
Si è già visto che

$$M^{-1}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2y-2z \\ 2x+y-2z \\ -2x-2y+3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

e che $MCD(x',y',z') = 1$. Si ha inoltre:

$$x+2y-2z < x \leftrightarrow y < z$$
$$2x+y-2z < y \leftrightarrow x < z$$
$$-2x-2y+3z > 0 \leftrightarrow 3z > 2(x+y) \leftrightarrow 9x^2+9y^2 > 4x^2+4y^2+8xy \leftrightarrow 5x^2+5y^2-8xy > 0$$

l'ultima disuguaglianza vale perché $5x^2+5y^2-8xy > 5x^2+5y^2-10xy = (\sqrt{5}x-\sqrt{5}y)^2$


A
M
B
[119 120]
[39 80]
[65 72]
[33 56]
[55 48]
[77 36]
[21 20]
[5 12]
[45 28]
[35 12]
[15 8]
[3 4]
80
72
56
48
36
28
24
20
12
8
4
3
3 4 5 7
15
21
33 35 39
45
55
65
77

(figura 2)

$x' = 0 \leftrightarrow\ x+2y-2z = 0 \leftrightarrow\ x+2y = 2z \leftrightarrow\ x^2+4y^2+4xy = 4x^2+4y^2 \leftrightarrow\ 3x = 4y$

$y' = 0 \leftrightarrow\ 2x+y-2z = 0 \leftrightarrow\ 2x+y = 2z \leftrightarrow\ 4x^2+y^2+4xy = 4x^2+4y^2 \leftrightarrow\ 3y = 4x$

e le ultime due uguaglianze sono verificate solo se (x,y,z) è una delle due terne progenitrici.

Calcoliamo infine $x'^2+ y'^2$. Risulta:

$$\begin{aligned}
&x'^2+ y'^2 = (x+2y-2z)^2+(2x+y-2z)^2 = \\
&(x^2+4y^2+4z^2+4xy-4xz-8yz)+(4x^2+y^2+4z^2+4xy-8xz-4yz) = \\
&5x^2+5y^2+8z^2+8xy-12xz-12yz = \\
&4x^2+4y^2+9z^2+8xy-12xz-12yz = \\
&(-2x-2y+3z)^2 = z'^2 .
\end{aligned}$$

Dal fatto che $A^{-1} = D_2 M^{-1}$ e $B^{-1} = D_1 M^{-1}$ si ricavano subito le analoghe conseguenze per le altre due matrici.

2° Passo. Sia (x,y,z) una TPP non progenitrice. Pre-moltiplicandola rispettivamente per le tre matrici A^{-1}, M^{-1}, B^{-1} si ottiene ancora una TPP (ovvero, $x' > 0$ e $y' > 0$) se e solo se (x,y,z) appartiene rispettivamente alla regione alta $\mathcal{A}$, alla regione media $\mathcal{M}$ o alla regione bassa $\mathcal{B}$.

Si è già visto che

$$M^{-1}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2y-2z \\ 2x+y-2z \\ -2x-2y+3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

Si ha: $x+2y-2z > 0 \leftrightarrow\ x+2y > 2z\ \leftrightarrow\ x^2+4y^2+4xy > 4x^2+4y^2 \leftrightarrow\ 4y > 3x$

$2x+ y-2z > 0 \leftrightarrow\ 2x+y > 2z\ \leftrightarrow\ 4x^2+y^2+4xy > 4x^2+4y^2 \leftrightarrow\ 4x > 3y$

quindi (x',y',z') è TPP se e solo se (x,y,z) sta in $\mathcal{M}$.
Analogamente

$$A^{-1}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2y-2z \\ -2x-y+2z \\ -2x-2y+3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

Si ha: $x+2y-2z > 0 \leftrightarrow\ x+2y > 2z\ \leftrightarrow\ x^2+4y^2+4xy > 4x^2+4y^2 \leftrightarrow\ 4y > 3x$

$-2x- y+2z > 0 \leftrightarrow\ 2x+y < 2z\ \leftrightarrow\ 4x^2+y^2+4xy < 4x^2+4y^2 \leftrightarrow\ 3y > 4x$

quindi (x',y',z') è TPP se e solo se (x,y,z) sta in $\mathcal{A}$.

Infine

$$B^{-1}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x-2y+2z \\ 2x+y-2z \\ -2x-2y+3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

Si ha: $-x-2y+2z > 0 \leftrightarrow \; x+2y < 2z \;\leftrightarrow\; x^2+4y^2+4xy < 4x^2+4y^2 \leftrightarrow \; 4y < 3x$

$2x+y-2z > 0 \leftrightarrow \; 2x+y > 2z \;\leftrightarrow\; 4x^2+y^2+4xy > 4x^2+4y^2 \leftrightarrow \; 3y < 4x$

quindi (x',y',z') è TPP se e solo se (x,y,z) sta in $\mathcal{B}$.

Possiamo ora concludere facilmente la dimostrazione del Fatto II. Partiamo dalla TPP (x,y,z), supponendo che essa non sia una delle due terne progenitrici. La pre-moltiplichiamo per A^{-1}, oppure per M^{-1}, oppure per B^{-1}, a seconda che essa appartenga alla regione alta $\mathcal{A}$, oppure alla regione media $\mathcal{M}$, oppure alla regione bassa $\mathcal{B}$.

Il Fatto II ci assicura che troviamo ancora una TTP, che ha i primi due coefficienti positivi e più piccoli di quelli di partenza. Se la nuova TPP coincide con una delle due terne progenitrici abbiamo finito il nostro percorso all'indietro, altrimenti ripetiamo la procedura.
Questo procedimento deve forzatamente terminare dopo un numero finito di passi, facendoci pervenire ad una delle due terne progenitrici, perché una successione strettamente decrescente di numeri interi positivi è necessariamente finita. ///

ESERCIZI

1) Data la TPP (275,252,373), ricavarla pre-moltiplicando la terna (3,4,5) per le matrici generatrici in modo opportuno.
2) Data la TPP (3335,2192,4217), ricavarla pre-moltiplicando la terna (3,4,5) per le matrici generatrici in modo opportuno.
3) Provare che, se la TPP (x,y,z) soddisfa a x-y=1 (risp., y-x=1), e se pre-moltiplicata per M produce la terna (x',y',z'), allora y'-x'=1(risp., x'-y'=1).
4) Provare che, se la TPP (x,y,z) ha x e z che sono due numeri dispari consecutivi, allora pre-moltiplicata per B produce la terna (x',y',z'), ha x' e z' che sono ancora due numeri dispari consecutivi.
5) Provare che, se la TPP (x,y,z) ha y e z che sono due numeri consecutivi, allora pre-moltiplicata per A produce la terna (x',y',z'), ha y' e z' che sono ancora due numeri consecutivi.
6) Una terna di numeri interi (x,y,z) si dice terna pitagorica intera (TPI) se $x^2+y^2 = z^2$ e z è positivo. Provare che moltiplicando due TPI nel modo seguente: $(x,y,z) \bullet (x',y',z') = (xx'-yy' , xy' + yx' , zz')$ si ottiene ancora una TPI, e che rispetto a tale moltiplicazione la terna (1,0,1) funge da elemento neutro.
7) Come calcolare M^{-1}

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & -2/3 & -2/3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 3 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 3 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 5 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 3 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 3 \end{array}\right]$$

Il procedimento che porta da $[M \mid I]$ a $[I \mid M^{-1}]$ sopra descritto si chiama “algoritmo di Gauss-Jordan”; ogni passaggio è costituito da “operazioni elementari”, realizzate tramite pre-moltiplicazione per opportune matrici invertibili, dette appunto “matrici elementari”.