TEORIA STABILE DELLA POPOLAZIONE

[Luigi Salce, Vicenza, 10 Marzo 2011]

GLI ATTREZZI

Useremo un pò di teoria delle matrici del tipo di quella usata per i sottotriangoli, ma con in più un pò di teoria dei grafi:

- Teorema di Perron-Frobenius (1907-1912): Se A è una matrice non negativa (cioè a coefficienti reali non negativi) irriducibile, il suo raggio spettrale r è un autovalore ed A ha un autovettore associato $\underline{x}$ con coordinate tutte positive:

$$A\,\underline{x} = r\,\underline{x} \quad , \quad \underline{x} > \underline{0}$$

– non è importante in questa sede sapere cosa significa che una matrice è “irriducibile”; basta sapere che questa proprietà si controlla tramite il grafo orientato $\Gamma(A)$ associato ad A : se A è nxn, $\Gamma(A)$ consiste di n vertici $V_1, V_2, \dots, V_n$, e di archi (o frecce) congiungenti le coppie di vertici (V_i,V_j) quando $a_{ij} \neq 0$

– la matrice A è irriducibile se esiste un cammino costituito da archi successivi che porta da un qualunque vertice V_i ad un qualunque altro vertice V_j; il che si esprime dicendo che il grafo è fortemente connesso

– Esempio: i grafi associati alle seguenti matrici

$$\begin{matrix} 0 & 4 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

sono rispettivamente

$\bullet\, V_1$ $\qquad$ $\bullet\, V_1$ $\qquad$ $\bullet\, V_1$

$V_2\bullet$ $\quad$ $\bullet\, V_3$ $\qquad$ $V_2\bullet$ $\quad$ $\bullet\, V_3$ $\qquad$ $V_2\bullet$ $\quad$ $\bullet\, V_3$

quindi il primo ed il terzo sono fortemente connessi, mentre il terzo no, perchè da V_1 e da V_2 non c'è un cammino che porta in V_3

– Teorema sulle matrici primitive: Sia A una matrice non negativa irriducibile. Se risulta $A^k > O$ per qualche $k \geq 1$ (cioè se A è primitiva), allora il raggio spettrale r di A soddisfa a $r > |\lambda|$ per ogni altro autovalore λ di A, e

$$\lim (A/r)^k = (1/\underline{v}^T\underline{w})\ \underline{v}\ \underline{w}^T$$

dove $\underline{v} > \underline{0}$ e $\underline{w} > \underline{0}$ sono autovettori destro e sinistro di A associati ad r

– si può controllare se una matrice irriducibile è primitiva tramite il grafo associato $\Gamma(A)$: oltre ad essere fortemente connesso, occorre che il massimo comune divisore delle lunghezze dei cammini chiusi (detti <u>cicli</u>) nel grafo $\Gamma(A)$ sia 1

– ad esempio, delle prime due matrici irriducibili viste sopra, la prima è primitiva perchè nel suo grafo ci sono un ciclo di lunghezza 2 ed uno di lunghezza 3, con MCD 1; mentre la seconda matrice ha il grafo con un unico ciclo di lunghezza 3, quindi non è primitiva

– le matrici viste sopra sono particolari esempi di matrici di Leslie, che sono il cuore del modello di Leslie; ne studieremo il polinomio caratteristico, il grafo associato, gli autovettori destri e sinistri associati al raggio spettrale

– una matrice di Leslie L ha la seguente forma

$$L = \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots\ldots & a_{N-1} & a_N \\ b_1 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & b_{N-1} & 0 \end{matrix}$$

ed è anche chiamata, per la sua forma, “matrice a V”.

Abbiamo visto, introducendo la Teoria stabile della popolazione, che una popolazione femminile, suddivisa in N fasce di età della stessa ampiezza, si evolve solo per nascite e morti, secondo parametri stabili nel tempo.
I parametri coinvolti sono:

a_i i-esimo <u>indice di natalità</u>, cioè il numero medio di figlie generato dalle femmine presenti nella fascia i-esima (i=1, 2,..., N)

b_j j-esimo <u>tasso di sopravvivenza</u>, cioè la frazione di femmine della fascia j-esima che sopravvivono passando alla fascia j+1-esima (j=1,..., N-1).

Si noti che $a_i \geq 0$ per ogni i e $1 \geq b_j > 0$ per ogni j. Le fasce d'età che hanno indice di natalità > 0 si dicono <u>fertili</u>. Nei modelli concreti studiati, come in quelli di popolazioni umane, accade sempre che le ultime fasce non siano fertili e che ci siano due fasce consecutive fertili, cioè $a_i > 0$ e $a_{i+1} > 0$, il che ha una importante conseguenza come vedremo. L'ipotesi di <u>stabilità</u> dice che tali parametri non variano col passare del tempo.

Denotiamo con $x_i^{(k)}$ il numero di femmine presenti nella fascia i-esima all'istante k-esimo; questa N-pla di numeri ($1 \leq i \leq N$), forma il <u>vettore della popolazione all'istante k-esimo</u>:

$$\underline{x}^{(k)} = [x_1^{(k)}\ x_2^{(k)}\ .....\ x_N^{(k)}]^T$$

Come varia il vettore della popolazione passando da un istante k a quello successivo k+1?

Naturalmente $x_1^{(k+1)}$ si ottiene sommando tutte le neonate generate da tutte le femmine presenti nelle diverse fasce all'istante precedente; tale numero si ottiene quindi così:

$$(*) \qquad x_1^{(k+1)} = a_1 x_1^{(k)} + a_2 x_2^{(k)} + ... + a_N x_N^{(k)}$$

Ogni altro numero $x_j^{(k+1)}$, per j > 1, si ottiene invece semplicemente moltiplicando $x_{j-1}^{(k)}$ per il tasso di sopravvivenza corrispondente, quindi:

$$(**) \qquad x_j^{(k+1)} = b_{j-1} x_{j-1}^{(k)} \qquad (j = 2, 3, ..., N).$$

Sia L la matrice NxN (detta matrice di Leslie):

$$L = \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & ..... & a_{N-1} & a_N \\ b_1 & 0 & 0 & ..... & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & ..... & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & ..... & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & ..... & b_{N-1} & 0 \end{matrix}$$

E' immediato verificare che risulta:

$$\underline{x}^{(k+1)} = L\, \underline{x}^{(k)}$$

e quindi che il vettore della popolazione all'istante k-esimo $\underline{x}^{(k)}$ si ottiene dal vettore della popolazione all'istante iniziale $\underline{x}^{(0)}$ nel modo seguente:

$$\underline{x}^{(k)} = L\, \underline{x}^{(k-1)} = L^2\, \underline{x}^{(k-2)} = \ldots . = L^{k-1}\, \underline{x}^{(1)} = L^k\, \underline{x}^{(0)}\,.$$

Si capisce quindi come, per vedere come evolve la popolazione femminile nel tempo, bisogna studiare le potenze della matrice L, e per comprendere come tale popolazione evolverà al tendere del tempo all'infinito, bisogna studiare il limite $\lim_{k\to\infty} L^k$.

Per poter applicare il Teorema sulle matrici primitive dobbiamo vedere quando una matrice di Leslie L è irriducibile e quando è primitiva.

FATTO 1. La matrice di Leslie NxN L è irriducibile se e solo se $a_N > 0$.

• V_1

V_2• • V_N

V_3• • V_{N-1}

… ...

V_i• • V_{1+1}

Infatti, per il fatto che i tassi di mortalità b_j sono tutti positivi, ci sono tutti gli archi (V_{i+1}, V_i) per i = 1, 2,..., N-1; quindi, se $a_N > 0$, c'è anche l'arco (V_1, V_N) che completa un cammino che passa per tutti i vertici e $\Gamma(L)$ è fortemente connesso. Se invece $a_N = 0$, allora dal vertice V_1 non parte nessun cammino verso altri vertici, quindi $\Gamma(L)$ non è fortemente connesso.

In generale (cosa sicuramente vera per il modello di popolazione umana con N = 20, ovvero con 20 fasce d'età di 5 anni ciascuna), accade che $a_N = 0$. Si considera allora l'ultimo indice di natalità $a_n > 0$, e si studia il modello limitatamente alle prime n fasce d'età, per il quale la matrice di Leslie risulta irriducibile. Non è difficile vedere che l'intero modello si riconduce alla studio delle prime n fasce.

FATTO 2. Una matrice di Leslie irriducibile L è primitiva se due fasce consecutive sono fertili, cioè se $a_i > 0$ e $a_{i+1} > 0$ per un qualche indice i.

In tal caso infatti ci sono in $\Gamma(L)$ due cammini chiusi di lunghezza i ed i+1, rispettivamente, il cui MCD è 1.

La condizione sufficiente del Fatto 2 non è necessaria. Affinché il MCD delle lunghezze dei cicli nel grafo associato ad A sia 1 basta anche che $a_1 > 0$.

Ora che sappiamo controllare facilmente se una matrice di Leslie è primitiva, possiamo andare a studiare a cosa tende al crescere del tempo il vettore della popolazione, ovvero calcolare il limite $\lim_{k\to\infty} \underline{x}^{(k)}$, studiando il limite $\lim_{k\to\infty} L^k$. Supporremo quindi L nxn con $a_n > 0$ e tale che $a_i > 0$, $a_{i+1} > 0$ per un qualche indice i.

FATTO 3. Il polinomio caratteristico di L è dato da:

$$p_L(X) = (-1)^n(X^n-a_1X^{n-1}-a_2b_1X^{n-2}-a_3b_1b_2X^{n-3} - \dots - a_nb_1b_2...b_{n-1})$$

ed ha un'unica radice reale positiva, coincidente col raggio spettrale r.

La verifica si fa per induzione su n; il lettore è invitato a verificarlo per n=3. Il fatto che $p_L(X)$ ha un'unica radice reale positiva si vedrà nel Fatto 7.

FATTO 4. Autovettori destro e sinistro di A associati ad r sono rispettivamente

$$\underline{v} = \begin{array}{l} 1 \\ b_1/r \\ b_1b_2/r^2 \\ \quad\dots\dots \\ b_1b_2...b_{n-1}/r^{n-1} \end{array} \qquad \underline{w} = \begin{array}{l} 1 \\ (r-a_1)/b_1 \\ (r^2-a_1r-a_2b_1)/b_1b_2 \\ \quad\dots\dots \\ (r^{n-1}-a_1r^{n-2}-...-a_{n-1}b_1b_2...b_{n-2})/b_1...b_{n-1} \end{array}$$

Si osservi che le coordinate di $\underline{v}$ sono tutte positive, perché i tassi di sopravvivenza sono tali; per vedere che anche le coordinate di $\underline{w}$ sono positive, basta osservare che $r^{n-1}-a_1r^{n-2}-...-a_{n-1}b_1b_2...b_{n-2} = a_nb_1b_2...b_{n-1} > 0$.

FATTO 5. Il Teorema sulle matrici primitive assicura che

$$\lim (L/r)^k = (1/\underline{v}^T\underline{w})\ \underline{v}\ \underline{w}^T$$

quindi

$$\lim_{k\to\infty} \underline{x}^{(k)}/r^k = \lim_{k\to\infty} L^k\underline{x}^{(0)}/r^k = \lim_{k\to\infty} (L/r)^k\underline{x}^{(0)} =$$

$$= [(1/\underline{v}^T\underline{w})\ \underline{v}\ \underline{w}^T]\ \underline{x}^{(0)} = (1/\underline{v}^T\underline{w})\ \underline{v}\ (\underline{w}^T\underline{x}^{(0)}) = C\ K\ \underline{v}$$

dove

– $C = 1/\underline{v}^T\underline{w}$ è una costante positiva che dipende, come il vettore $\underline{v}$, solo dalla matrice L e non dal vettore iniziale $\underline{x}^{(0)}$
– $K = \underline{w}^T\underline{x}^{(0)}$ è una costante positiva che mantiene la memoria della situazione iniziale del vettore della popolazione $\underline{x}^{(0)}$.

Osserviamo che, dato il vettore della popolazione all'istante k-esimo

$$\underline{x}^{(k)} = [x_1^{(k)}\, x_2^{(k)} \ldots x_n^{(k)}]^T,$$

posto $p_i^{(k)} = x_i^{(k)} / \sum_j x_j^{(k)}$, il vettore

$$\underline{p}^{(k)} = [p_1^{(k)}\, p_2^{(k)} \ldots p_n^{(k)}]^T$$

denota il vettore delle percentuali secondo cui la popolazione si suddivide nelle diverse fasce all'istante k-esimo.

FATTO 6. Il vettore $\lim_{k\to\infty} \underline{p}^{(k)}$ dipende solo dalla matrice L e dal suo autovettore $\underline{v}$ e non dal vettore $\underline{x}^{(0)}$ **.**

Per il Fatto 5 risulta, per ogni $i \leq n$:

$$x_i^{\infty} / \sum_j x_j^{\infty} = \lim_{k\to\infty} \left(x_i^{(k)} / \sum_j x_j^{(k)} \right) = \lim_{k\to\infty} \left(x_i^{(k)} / r^k \right) / \left(\sum_j x_j^{(k)} / r^k \right)$$

$$= \left(C\, K\, v_i \right) / \left(\sum_j C\, K\, v_j \right) = \left(C\, K\, v_i \right) / C\, K \left(\sum_j v_j \right) = v_i / \sum_j v_j$$

quindi $\lim_{k\to\infty} \underline{p}^{(k)} = \underline{v} / \sum_j v_j$.

Il Fatto 6 dà la dimostrazione della "ergodicità forte" del modello di Leslie, cioè del fatto, congetturato già da Eulero nel 1760, che la distribuzione per fasce d'età della popolazione femminile tende ad una configurazione percentuale indipendente dalle condizioni iniziali e dipendente solo dagli indici di natalità e dai tassi di sopravvivenza.

Dall'uguaglianza $\lim_{k\to\infty} \underline{x}^{(k)}/r^k = C\, K\, \underline{v}$ segue che, per $k>>0$, $\underline{x}^{(k)}$ è molto vicino ad $r^k C\, K\, \underline{v}$, in simboli:

$$\underline{x}^{(k)} \sim r^k C\, K\, \underline{v}\ ;$$

ne consegue che $\underline{x}^{(k+1)} \sim r\underline{x}^{(k)}$, quindi:

- se $r > 1$ la popolazione cresce indefinitamente
- se $r = 1$ la popolazione tende a stabilizzarsi
- se $r < 1$ la popolazione tende ad estinguersi.

Poiché non è usualmente facile calcolare l'autovalore r, per vedere senza troppa fatica quale delle tre possibilità sopra descritte si realizzerà, si può calcolare la quantità:

$$R = a_1 + a_2 b_1 + \ldots + a_n b_1 .. b_{n-1}$$

che è chiamata <u>velocità di riproduzione</u>; vale infatti il fatto seguente.

FATTO 7. $R > 1 \iff r > 1$; $R = 1 \iff r = 1$; $R < 1 \iff r < 1$.

Si consideri la funzione $q_L : \mathbf{R}_{>0} \to \mathbf{R}$ definita da:

$$q_L(x) = a_1/x + a_2b_1/x^2 + \dots + a_nb_1..b_{n-1}/x^n$$

che è evidentemente strettamente decrescente e che soddisfa a:

$$\lim_{x\to 0+} q_L(x) = +\infty \qquad , \quad \lim_{x\to +\infty} q_L(x) = 0 .$$

Quindi esiste uno ed un solo numero reale positivo x_0 tale che $q_L(x_0) = 1$, e tale numero x_0 coincide necessariamente col raggio spettrale r, perché

$$q_L(x) = 1 \iff a_1x^{n-1}+a_2b_1x^{n-2}+ \dots + a_nb_1b_2...b_{n-1} = x^n \iff p_L(x) = 0 .$$

Si osservi ora che:

$$R = q_L(1) > 1 \iff 1 > r$$
$$R = q_L(1) = 1 \iff 1 = r$$
$$R = q_L(1) < 1 \iff 1 < r .$$

Delle tre matrici dell'Esempio iniziale:

- la prima è primitiva ed ha $R = 2 + ¾ > 1$, quindi la popolazione cresce indefinitamente

- la seconda è irriducibile ma non primitiva, quindi non si applica il Teorema sulle matrici primitive; infatti un facile calcolo mostra che il suo polinomio caratteristico è $-X^3+1$, quindi il raggio spettrale è 1, e che il suo cubo è uguale alla matrice identità I_3; di conseguenza la successione delle sue potenze non può convergere

- la terza ha l'ultima fascia non fertile, quindi si può studiare il "sottomodello" con matrice di Leslie

$$\begin{matrix} ½ & 1 \\ ½ & 0 \end{matrix}$$

  che è primitiva, con polinomio caratteristico $X^2-1/2X-1/2$, quindi con autovalori $1 = r$ e $-1/2$. Poiché $R = ½ + ½ = 1$, tale sottomodello tende a stabilizzarsi.

ESERCIZI

1) Della prima matrice dell'Esempio iniziale, calcolare il polinomio caretteristico, provare che il raggio spettrale è $r = 3/2$, calcolare gli altri due autovalori, nonché l'autovettore destro e l'autovettore sinistro associati ad r.

2) Data la matrice di Leslie 3x3 con $a_1 = 0$, $a_2 = 1 = a_3$, $b_1 = 3/4$, $b_2 = 1/3$, calcolarne il polinomio caratteristico; provare che $r = 1$ e trovare gli altri due autovalori; trovare l'autovettore destro e l'autovettore sinistro associati ad r e la matrice cui converge la successione delle potenze della matrice. Dato il vettore della popolazione iniziale $\underline{x}^{(0)} = [1.000,\ 1.000,\ 1.000]^T$, trovare il vettore $\underline{x}^\infty = \lim_{k\to\infty} \underline{x}^{(k)}$.

3) Si provi che una matrice di Leslie con primo e ultimo indice di natalità positivi e tutti gli altri nulli è primitiva.

4) Se tutti gli indici di natalità sono nulli, si ha un modello "di pura sopravvivenza"; si provi che in tal caso, se ci sono N fasce di popolazione, la popolazione si annulla dopo N istanti temporali, qualunque sia la popolazione iniziale.

5) Si provi che un modello di Leslie con tutti i tassi di sopravvivenza uguali ad 1 e con tutti gli indici di natalità positivi tende a stabilizzarsi (rispettivamente, a crescere indefinitamente o ad azzerarsi) se e solo se la somma degli indici di natalità è 1 (rispettivamente, > 1 oppure < 1).

6) Data una matrice di Leslie irriducibile nxn, con n numero primo, provare che è primitiva non appena ha un indice di natalità positivo diverso dall'ultimo.

7) Data la matrice di Leslie 2x2 con $a_1 = 1/2$, $a_2 = 1$ e $b_1 = 1/2$, calcolare il vettore $\underline{x}^\infty = \lim_{k\to\infty} \underline{x}^{(k)}$ per $\underline{x}^{(0)} = [1 \quad 1]^T$.

`«“‘¥~‹÷´`≠¡ˆ[πøœ¨™®€Ω„åß∂ƒ∞∆ªº¬@#¶–•…µ˜∫√©†∑≤
ı»”’¢%‰›⁄ ≈¿±}{∏ØŒÙÆÒÌÈÀ‚Å¯˘˙˚¸˝˛ˇÇ∞◊—· ÚÓÍÉÁ‡ ≥

∴.1234567890∍⌠+\ποιυψτρεωθασδφγηφκλ∫◊-.,μνβϖχξζ<
|!”≤∃%&/()=?⊥∗ΠΟΙΥΨΤΡΕΩΘΑΣΔΦΓΗϑΚΛ|°♣_:;ΜΝΒςΧΞΖ>

¯↔“‘‘∞~‹|×¯≠ϒˆ[π/œ♦™→∈Ω„∑⇓∂ƒ∞∆♠≡←≅#∂–•…∝˜∫√♥†∑≤

ı≈”’’%‰›⁄ ≈↵±}{∏¬Œ^∅®⊂∪ℵ,⊕↓˘˙˚÷˝˛ˇ∩∞◊—• ˇ©⊆⊃ℑ‡ ≥