

SOTTOTRIANGOLI E LORO BARICENTRI

[Luigi Salce, Vicenza, 23 Febbraio 2011]

GLI ATTREZZI

Useremo un pò di geometria elementare:

- il teorema di Talete su un fascio di rette parallele tagliato da una retta
- le coordinate del baricentro di un triangolo in funzione delle coordinate dei tre vertici: sono un terzo della loro somma
- come si trova geometricamente il baricentro di un triangolo: intersecando le mediane, oppure intersecando le rette parallele ai tre lati che tagliano gli altri due lati ad un terzo dai due vertici del lato parallelo.

Useremo un pò di teoria delle matrici:

- ancora la moltiplicazione "righe per colonne"
- proprietà delle matrici bistocastiche (o doppiamente stocastiche) S , che sono matrici quadrate a coefficienti reali non negativi con somma di ogni riga e di ogni colonna pari ad 1; ad esempio

$$\begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \text{ oppure } \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

- la caratterizzazione delle matrici bistocastiche tramite le due uguaglianze:

$$S\mathbf{u} = \mathbf{u} \quad \text{e} \quad \mathbf{u}^T S = \mathbf{u}^T \quad \text{dove } \mathbf{u} = [1 \ 1 \ \dots \ 1 \ 1]^T$$

- le nozioni di autovalore λ di una matrice $n \times n$ A , di autovettore destro \mathbf{v} e di autovettore sinistro \mathbf{w} associati a λ :

λ è un numero (in generale di \mathbb{C}) e $\mathbf{v} \neq \mathbf{0} \neq \mathbf{w}$ sono vettori di \mathbb{C}^n tali che

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \quad \text{e} \quad \mathbf{w}^T A = \lambda\mathbf{w}^T$$

- il che dice che una matrice bistocastica ha 1 come autovalore con autovettore destro e sinistro il vettore $\mathbf{u} = [1 \ 1 \ \dots \ 1 \ 1]^T$

- il fatto che una matrice $n \times n$ A ha esattamente n autovalori (se ripetuti con la loro molteplicità, essendo le radici di un polinomio di grado n), e quindi ce ne è uno tra di essi che ha il modulo (= distanza dall'origine nel piano complesso) massimo; tale numero reale si chiama raggio spettrale di A

- il fatto che il raggio spettrale di una matrice bistocastica S è 1

- i seguente risultati fondamentali

TEOREMA. Se una matrice reale A a coefficienti non negativi ha una potenza con coefficienti tutti positivi, allora ha raggio spettrale r che è anche un suo autovalore, e se sono suoi autovettori destro e sinistro v e w , allora la successione delle potenze $(A/r)^k$ ($k \geq 1$) converge alla matrice:

$$(1/v^T w) v \cdot w^T$$

COROLLARIO. Se una matrice bistocastica $n \times n$ S ha una potenza con coefficienti tutti positivi, allora la successione delle potenze S^k ($k \geq 1$) converge alla matrice

$$(1/u^T u) u \cdot u^T = (1/n) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

SOTTOTRIANGOLI E BARICENTRI

Partiamo con due definizioni che rimandano alla nozione di segmenti proporzionali di Eudosso.

DEFINIZIONE. Dati un segmento AB e due numeri reali positivi p e q , chiamasi **(p:q)-punto** tra A e B il punto H interno al segmento tale che $AH / HB = p / q$.

Per semplicità di notazione si è denotato con AB sia il segmento di estremi i punti A e B che la sua lunghezza. Si noti che il $(p:q)$ -punto tra A e B è il $(q:p)$ -punto tra B ed A .

DEFINIZIONE. Dato il triangolo ΔABC e due numeri positivi p e q , chiamasi **(p:q)-sottotriangolo** il triangolo $\Delta A'B'C'$ avente i vertici nei tre punti A' , B' , C' che sono rispettivamente $(p:q)$ -punti tra A e B , tra B e C e tra C ed A .

Si noti che è rilevante l'ordine con cui si fissano i vertici del triangolo e che il $(p:q)$ -sottotriangolo di ΔABC coincide con il $(q:p)$ -sottotriangolo di ΔACB .

Esprimiamo nella terminologia introdotta nelle due precedenti definizioni il classico risultato riguardante il baricentro di un triangolo.

TEOREMA A. Dato il triangolo ΔABC , i segmenti paralleli ai tre lati congiungenti i $(2:1)$ -punti tra ciascun vertice e gli altri due vertici si tagliano reciprocamente a metà e si incontrano nel baricentro del triangolo. (si veda la Figura 1).

Il teorema seguente può essere dimostrato con i metodi della geometria elementare;

TEOREMA B. Nel triangolo ΔABC il segmento parallelo al lato BC congiungente i $(2:1)$ -punti tra A e B e tra A e C contiene la mediana dell' $(1:2)$ -

TEOREMA A

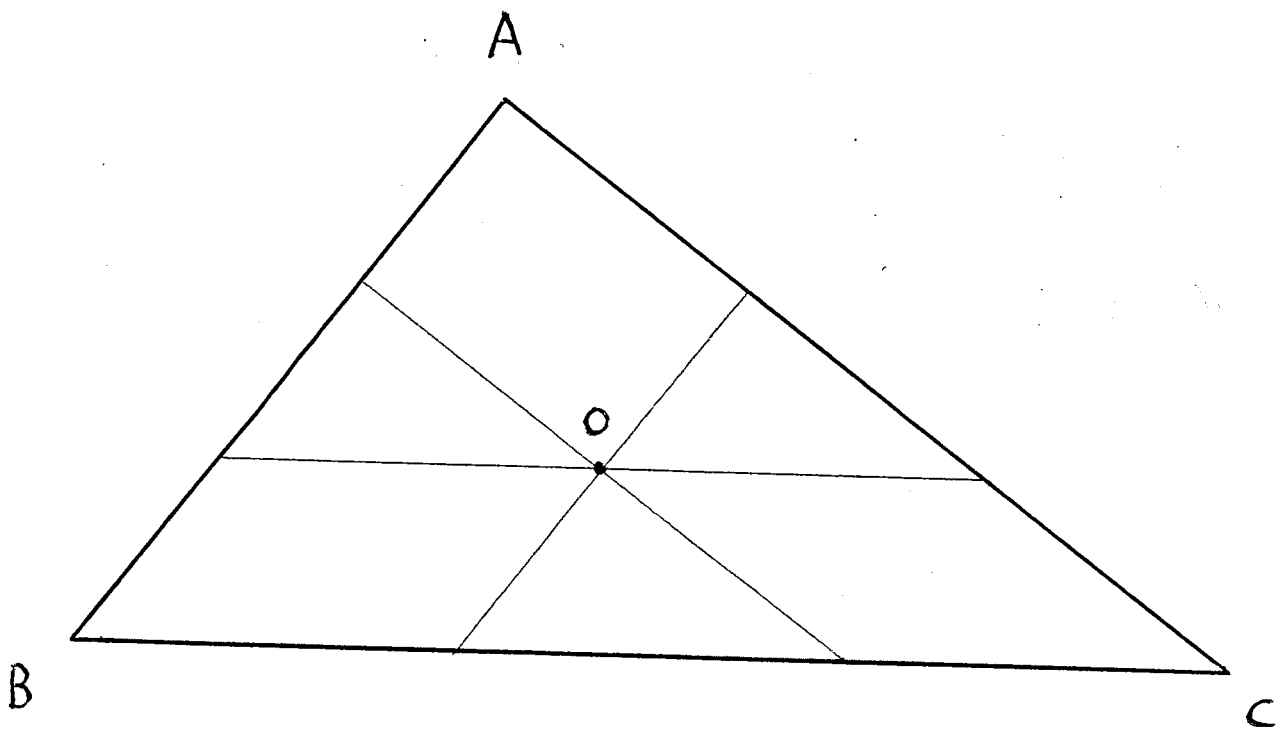


FIGURA 1

sottotriangolo $\Delta A'B'C'$ tirata da C' . Dualmente, la mediana dal vertice A contiene il segmento parallelo al lato $A'B'$ congiungente i $(2:1)$ -punti da C' . (si veda la Figura 2).

Il Teorema B è una conseguenza del fatto che il triangolo ΔABC ed il suo $(1:2)$ -sottotriangolo $\Delta A'B'C'$ hanno i rispettivi baricentri coincidenti (si veda il Teorema 1 di seguito). Questo teorema e simili altri hanno dimostrazioni semplici se si traducono in linguaggio matriciale.

Prendiamo allora un sistema bidimensionale di coordinate cartesiane ortogonali; un punto P è identificato col vettore delle sue due coordinate: $P \equiv [x_P \ y_P]$. I punti $A \equiv [x_A \ y_A]$, $B \equiv [x_B \ y_B]$, $C \equiv [x_C \ y_C]$, etc., saranno anche denotati rispettivamente con i simboli \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , etc.. La somma tra due vettori è l'usuale "somma per coordinate" e la moltiplicazione di un numero α per un vettore è l'usuale "prodotto per scalare":

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = [x_A + x_B \ y_A + y_B] \qquad \alpha \mathbf{a} = [\alpha x_A \ \alpha y_A].$$

Al triangolo ΔABC viene associata una matrice con tre righe -una per ogni vertice- e due colonne, contenenti le ascisse e le ordinate dei tre vertici; si ha così la **matrice associata** al triangolo ΔABC :

$$M = \begin{bmatrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \\ x_C & y_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{bmatrix}.$$

Osserviamo che il baricentro O del triangolo ΔABC che ha matrice associata M è il punto di coordinate

$$x_O = 1/3(x_A + x_B + x_C) \quad y_O = 1/3(y_A + y_B + y_C)$$

(si veda la Figura 3), per cui $\mathbf{o} = 1/3 (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$. Si consideri il $(p:q)$ -sottotriangolo $\Delta A'B'C'$ di ΔABC , con matrice associata

$$M' = \begin{bmatrix} x_{A'} & y_{A'} \\ x_{B'} & y_{B'} \\ x_{C'} & y_{C'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}' \\ \mathbf{b}' \\ \mathbf{c}' \end{bmatrix}.$$

Il passaggio dalla matrice M alla matrice M' avviene tramite premoltiplicazione (righe per colonne) per la matrice $S_{p,q}$, cioè $M' = S_{p,q} M$, dove

$$S_{p,q} = (p+q)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} q & p & 0 \\ 0 & q & p \\ p & 0 & q \end{bmatrix}$$

(si veda la Figura 4).

TEOREMA B

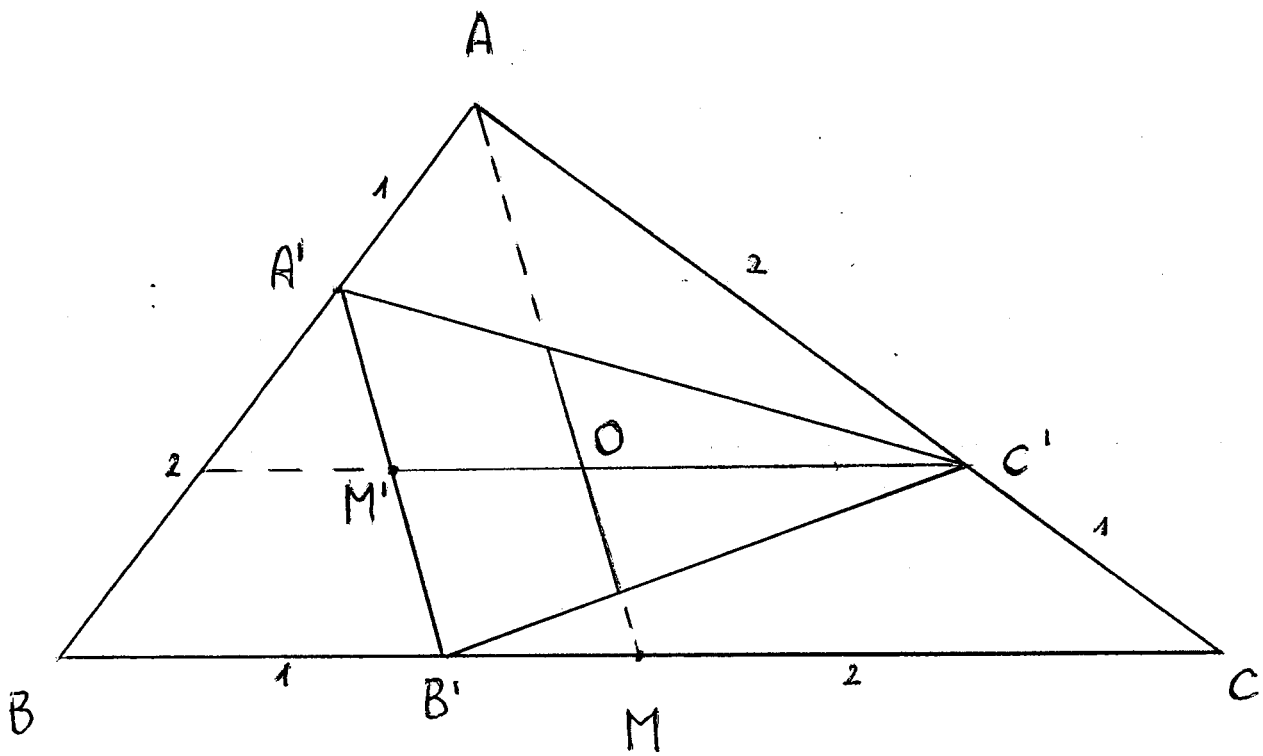
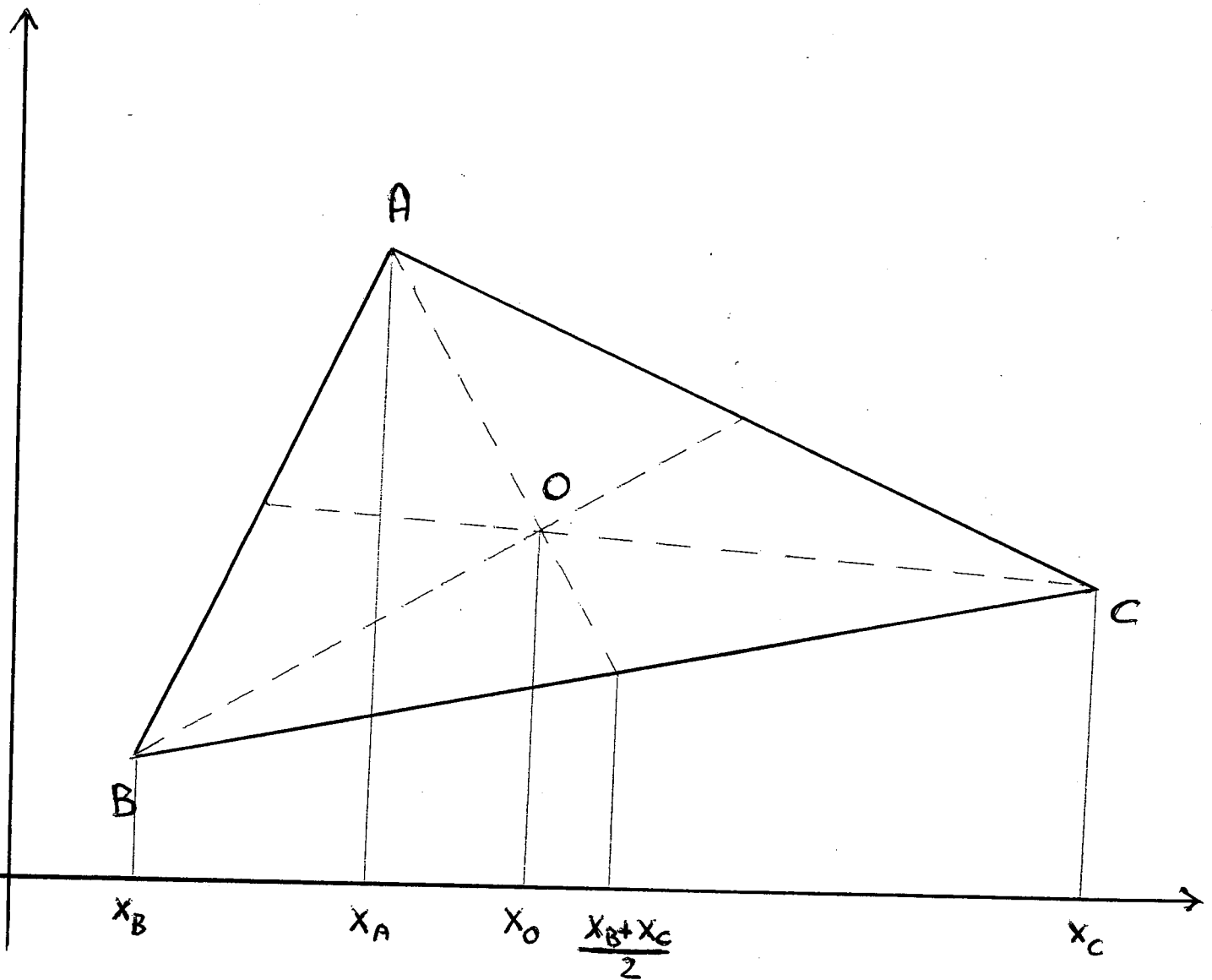


FIGURA 2

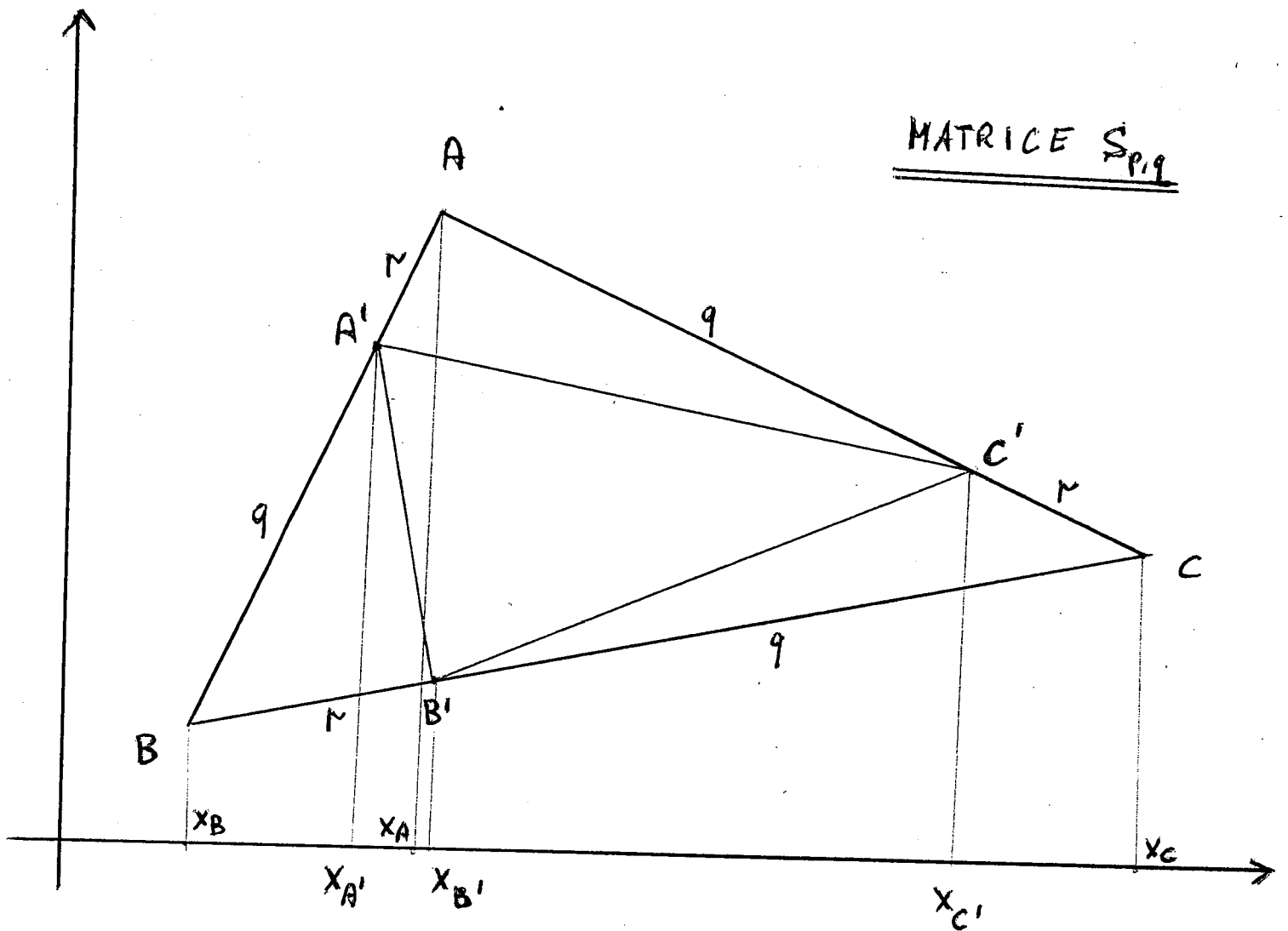
COORDINATE DEL
BARICENTRO



per Talete :
$$\frac{\frac{x_B + x_C}{2} - x_0}{x_0 - x_A} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_B + x_C - 2x_0 = x_0 - x_A$$

$$\Leftrightarrow x_B + x_C + x_A = 3x_0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$$

FIGURA 3



per Talete:

$$\frac{x_A - x_{A'}}{x_{A'} - x_B} = \frac{r}{q} \Rightarrow qx_A - qx_{A'} = rx_{A'} - rx_B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{A'} = \frac{1}{r+q} (qx_A + rx_B)$$

$$\frac{x_C - x_{B'}}{x_{B'} - x_B} = \frac{q}{r} \Rightarrow x_{B'} = \frac{1}{r+q} (qx_B + rx_C)$$

$$\frac{x_C - x_{C'}}{x_{C'} - x_A} = \frac{r}{q} \Rightarrow x_{C'} = \frac{1}{r+q} (rx_A + qx_C)$$

e similmente per $y_{A'}$, $y_{B'}$, $y_{C'}$.

$$\begin{bmatrix} x_{A'} & y_{A'} \\ x_{B'} & y_{B'} \\ x_{C'} & y_{C'} \end{bmatrix} = \frac{1}{r+q} \cdot \begin{bmatrix} q & r & 0 \\ 0 & q & r \\ r & 0 & q \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \\ x_C & y_C \end{bmatrix}$$

FIGURA 4

Osserviamo che la matrice $S_{p,q}$ è **non-negativa** (cioè i suoi coefficienti sono numeri reali ≥ 0) e che le righe e le colonne di $S_{p,q}$ hanno tutte somma 1; ciò si esprime dicendo che $S_{p,q}$ è **doppiamente stocastica**. Una tale matrice S può essere definita tramite le uguaglianze

$$\mathbf{u}^T S = \mathbf{u}^T, \quad S \mathbf{u} = \mathbf{u}$$

dove $\mathbf{u} = [1, 1, \dots, 1]^T$ è il vettore (colonna) con tutte le coordinate uguali ad 1. Queste uguaglianze dicono rispettivamente che il vettore \mathbf{u} è autovettore sinistro e destro relativo all'autovalore 1 della matrice S .

Per le matrici doppiamente stocastiche valgono alcuni risultati rilevanti, tra cui ricordiamo un classico teorema degli anni '40 dovuto a Birkhoff, il quale afferma che ogni matrice doppiamente stocastica è combinazione convessa di matrici di permutazione (che si ottengono dalla matrice identica I permutandone le righe o le colonne).

Un altro risultato, che useremo fra poco, dice che ogni altro autovalore di una matrice (doppiamente) stocastica S ha modulo ≤ 1 (lo si vede facilmente usando il famoso teorema dei cerchi di Gerschgorin) e quindi 1 è autovalore di modulo massimo; in simboli, se $S \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$ per un vettore $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, allora $|\lambda| \leq 1$. In generale possono esserci altri autovalori di modulo 1.

Con l'uso della matrice $S_{p,q}$ introdotta sopra si provano in modo molto semplice alcuni teoremi di geometria elementare sui triangoli.

TEOREMA 1. *Un triangolo ΔABC ed il suo $(p:q)$ -sottotriangolo $\Delta A'B'C'$ hanno i rispettivi baricentri coincidenti per ogni coppia di numeri positivi p e q .*

Dim. Se M ed M' denotano le matrici associate ai due triangoli, l'uguaglianza $M' = S_{p,q} M$ corrisponde a:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}' \\ \mathbf{b}' \\ \mathbf{c}' \end{bmatrix} = (p+q)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} q & p & 0 \\ 0 & q & p \\ p & 0 & q \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{bmatrix} = (p+q)^{-1} \begin{bmatrix} q\mathbf{a} + p\mathbf{b} \\ q\mathbf{b} + p\mathbf{c} \\ p\mathbf{a} + q\mathbf{c} \end{bmatrix}$$

da cui segue:

$$\mathbf{a}' + \mathbf{b}' + \mathbf{c}' = (p+q)^{-1}(q\mathbf{a} + p\mathbf{b} + q\mathbf{b} + p\mathbf{c} + p\mathbf{a} + q\mathbf{c}) = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c},$$

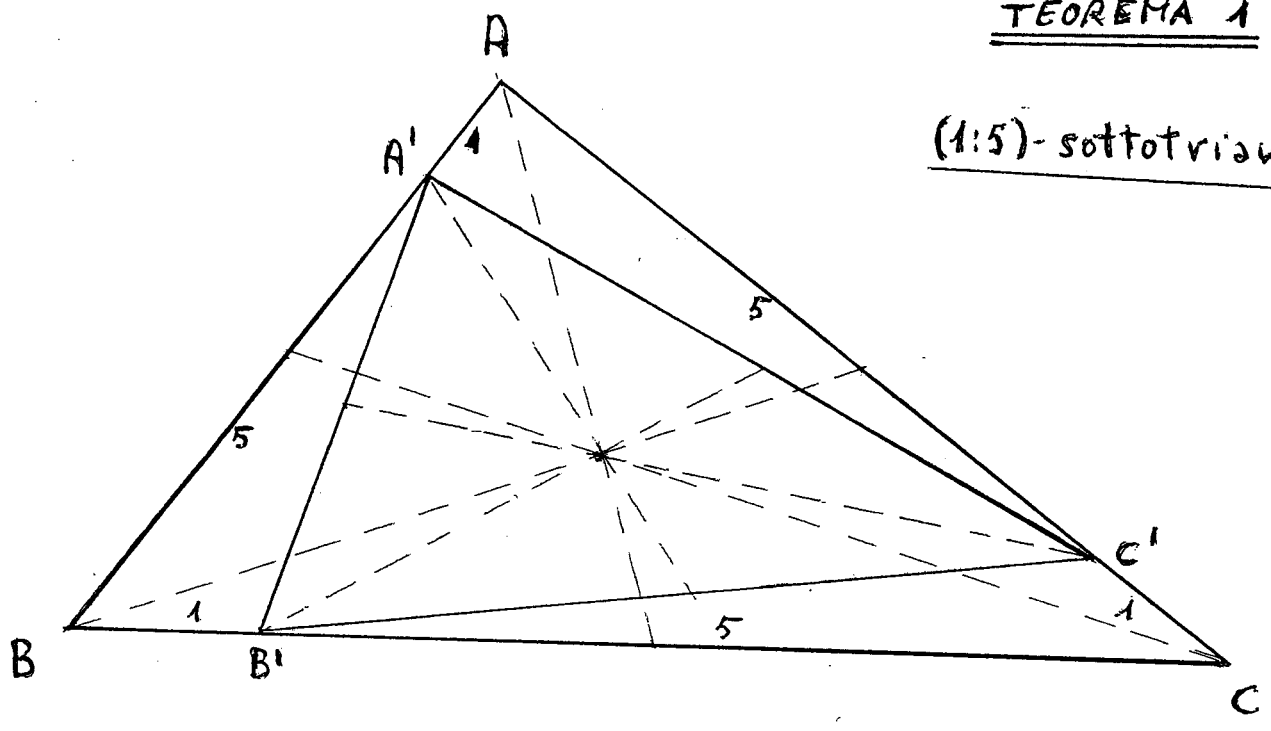
cioè

$$\begin{aligned} x_O &= x_{A'} + x_{B'} + x_{C'} / 3 = x_A + x_B + x_C / 3 = x_O \\ y_O &= y_{A'} + y_{B'} + y_{C'} / 3 = y_A + y_B + y_C / 3 = y_O \end{aligned}$$

(si veda la Figura 5).

TEOREMA 1

(1:5)-sottotriangolo



TEOREMA 2

(1:1)-sottotriangolo

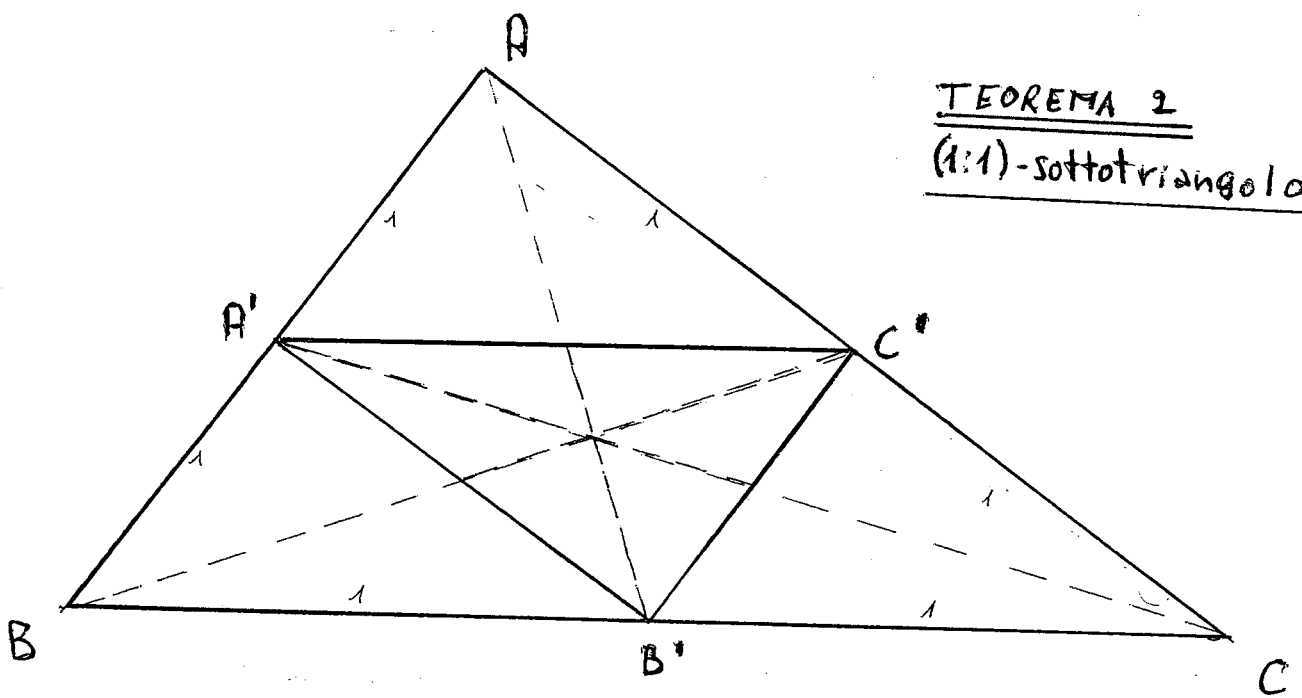


FIGURA 5-6

TEOREMA 2. $L'(1:1)$ -sottotriangolo di ΔABC è simile a ΔABC .

Dim. Procedendo come nella dimostrazione precedente si ha:

$$\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b/2 \\ b+c/2 \\ a+c/2 \end{bmatrix} .$$

Se $\|a-b\| = ((x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2)^{1/2}$ denota l'usuale lunghezza del segmento di estremi A e B, si ha quindi:

$$\|a'-b'\| = \|a-c\|/2 ; \|b'-c'\| = \|b-a\|/2 ; \|a'-c'\| = \|b-c\|/2.$$

Pertanto i due triangoli hanno i lati che stanno in rapporto di 1 a 1/2, quindi sono simili (si veda la Figura 6).

Dato il triangolo ΔABC , possiamo considerarne il suo (p:q)-sottotriangolo $\Delta A'B'C'$ e poi il (p':q')-sottotriangolo di $\Delta A'B'C'$. Il risultato è chiamato il (p':q')(p:q)-sottotriangolo di ΔABC .

TEOREMA 3. $L'(1:2)^2$ -sottotriangolo di ΔABC è simile a ΔABC .

Dim. Procedendo come nella dimostrazione precedente ed osservando che risulta

$$S_{1,2}^2 = \frac{1}{3^2} \begin{bmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

si ricava:

$$\begin{bmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{bmatrix} = \frac{1}{3^2} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4a+4b+c/9 \\ a+4b+4c/9 \\ 4a+b+4c/9 \end{bmatrix} .$$

Si ha quindi:

$$\|a''-b''\| = \|a-c\|/3 ; \|b''-c''\| = \|b-a\|/3 ; \|a''-c''\| = \|b-c\|/3.$$

Pertanto i due triangoli hanno i lati che stanno in rapporto di 1 a 1/3, quindi sono simili (si veda la Figura 7).

A differenza di quanto accade nel Teorema 3, l' $(1:n)^n$ -sottotriangolo di un triangolo ΔABC non è in generale simile al triangolo ΔABC stesso se $n \geq 3$ (si veda la Figura 8 che considera un triangolo rettangolo isoscele ed $n=3$).

TEOREMA 3
 $(1:2)^2$ - sottotriangolo

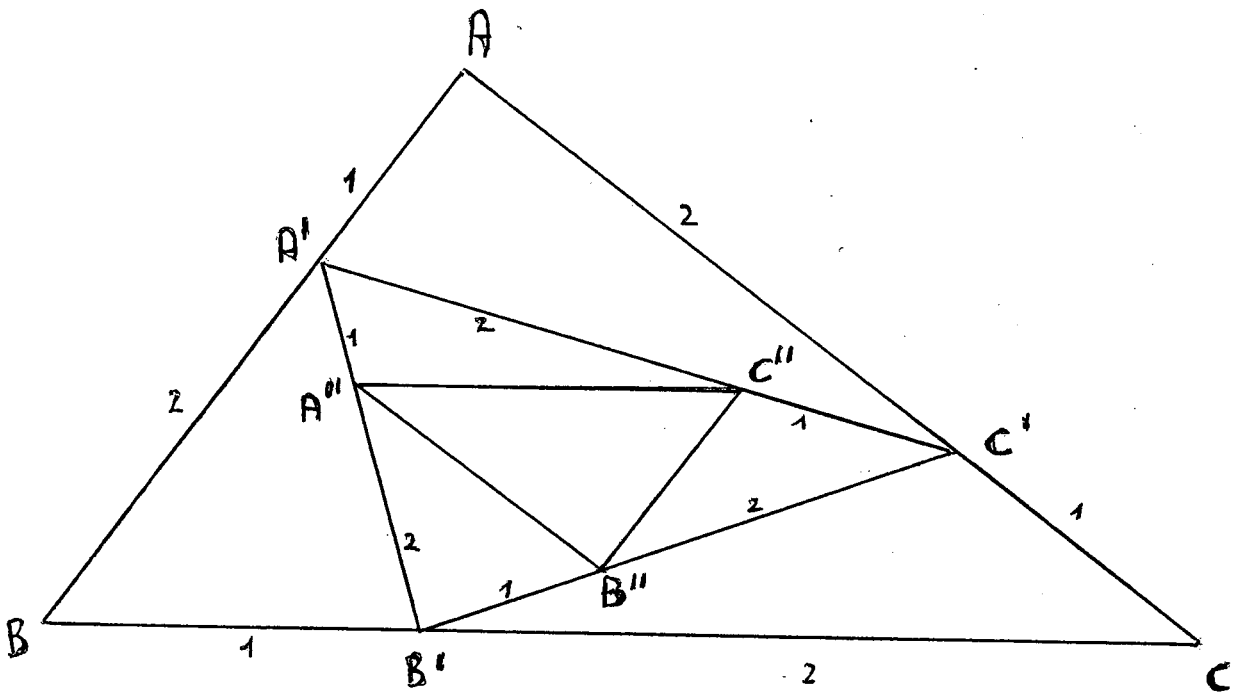
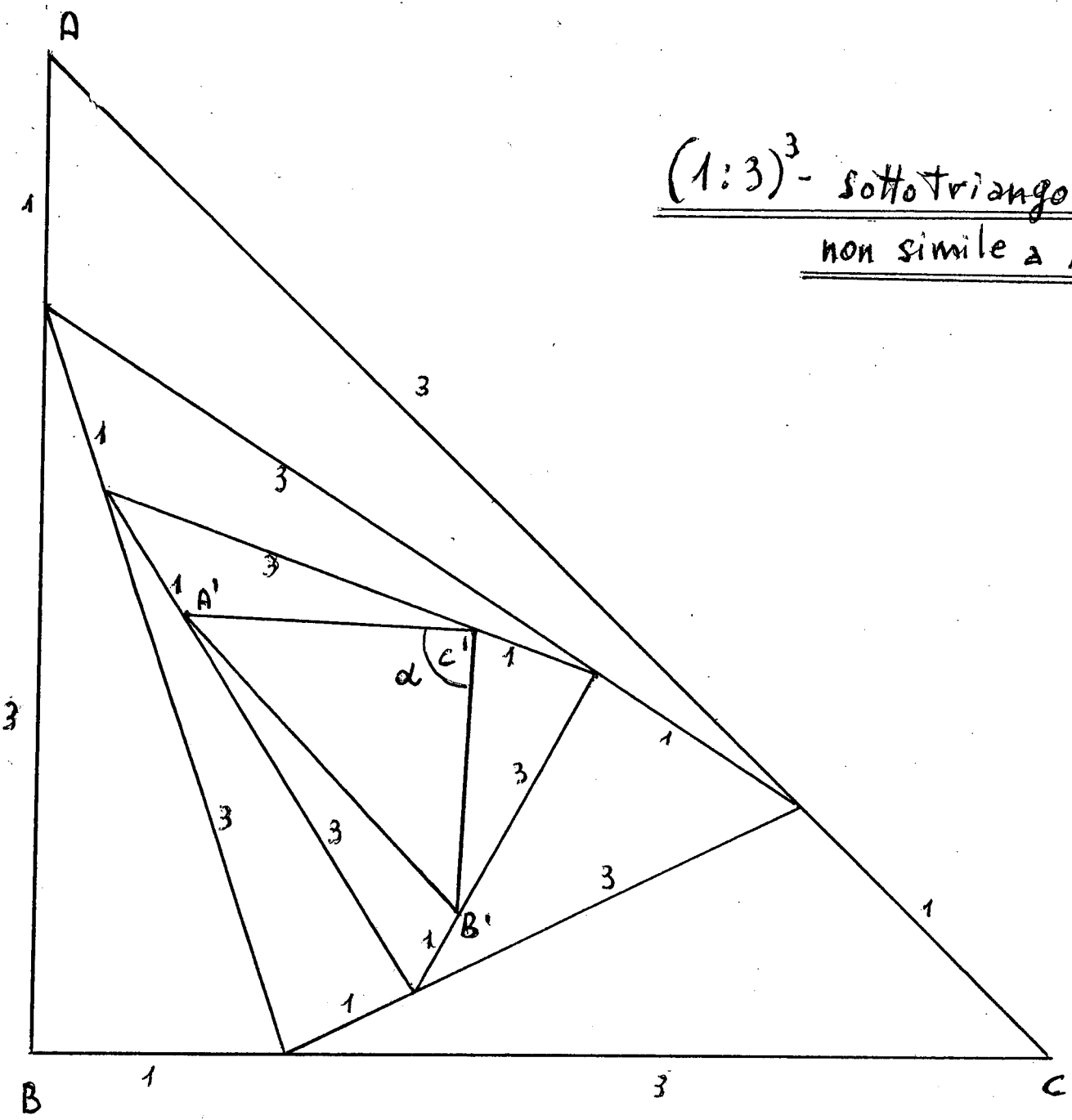


FIGURA 7



$(1:3)^3$ - sottotriangolo $\Delta A'B'$
non simile a ΔABC

$$S_{1,3}^3 = \frac{1}{64} \begin{bmatrix} 28 & 27 & 9 \\ 9 & 28 & 27 \\ 27 & 9 & 28 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \underline{a}' &= 28\underline{a} + 27\underline{b} + 9\underline{c} / 64 \\ \underline{b}' &= 9\underline{a} + 28\underline{b} + 27\underline{c} / 64 \\ \underline{c}' &= 27\underline{a} + 9\underline{b} + 28\underline{c} / 64 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{a}' - \underline{b}' &= 19\underline{a} - \underline{b} - 18\underline{c} ; \underline{b}' - \underline{c}' = -18\underline{a} + 19\underline{b} - \underline{c} ; \underline{a}' - \underline{c}' = \underline{a} + 18\underline{b} - 19\underline{c} \\ &= -18(\underline{a} - \underline{b}) + (\underline{b} - \underline{c}) \qquad \qquad \qquad = (\underline{a} - \underline{b}) + 19(\underline{b} - \underline{c}) \end{aligned}$$

$$(\underline{a} - \underline{b})^T \cdot (\underline{b} - \underline{c}) = 0 \Rightarrow (\underline{b}' - \underline{c}')^T \cdot (\underline{a}' - \underline{c}') = -18\|\underline{a} - \underline{b}\|^2 + 19\|\underline{b} - \underline{c}\|^2 = \|\underline{b} - \underline{c}\|^2 \neq 0$$

FIGURA 8

posto $\|\underline{a} - \underline{b}\| = 1 = \|\underline{b} - \underline{c}\|$, risulta:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{(18^2+1)(19^2+1)}} \approx \frac{1}{342} \Rightarrow \alpha \approx \frac{\pi}{2}$$

Convergenza di successioni di sottotriangoli e matrici primitive

Invece che iterare un numero finito di volte l'operazione di prendere un (p:q)-sottotriangolo di ΔABC , come nel Teorema 3 e nella Figura 8, si può iterare tale operazione infinite volte, ottenendo una successione di sottotriangoli di ΔABC . Si può tenere fisso il rapporto (p:q), oppure lo si può variare. Per poter studiare l'andamento di successioni di sottotriangoli abbiamo bisogno di un importante risultato sulle matrici primitive, di cui la matrice doppiamente stocastica $S_{p,q}$ da noi utilizzata è un esempio.

Torniamo quindi alla matrice $S_{p,q}$ che realizza il passaggio da un triangolo al suo (p:q)-sottotriangolo. Osserviamo che la matrice $S_{p,q}^2$ è **positiva**, cioè ha tutti i suoi coefficienti positivi; infatti risulta:

$$S_{p,q}^2 = (p+q)^{-2} \cdot \begin{bmatrix} q^2 & 2pq & p^2 \\ p^2 & q^2 & 2pq \\ 2pq & p^2 & q^2 \end{bmatrix}.$$

Una matrice non-negativa che ha una sua potenza che diventa positiva si dice **primitiva**. Per tali matrici vale il seguente risultato, il cui punto 1) costituisce parte del famoso teorema di Perron-Frobenius.

TEOREMA. Per una matrice primitiva A valgono i seguenti fatti:

- 1) A ha un unico autovalore ρ di modulo massimo, reale e positivo, che è dotato di autovettori destro \mathbf{u} e sinistro \mathbf{v} positivi (cioè $A\mathbf{u} = \rho\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}^T A = \rho\mathbf{v}^T$);
- 2) la successione delle potenze $\left(\frac{A^n}{S^n}\right)_{n \geq 1}$ converge alla matrice positiva $A^\infty = \mathbf{u}\mathbf{v}^T / \mathbf{u}^T \mathbf{v}$.

Ciò comporta che la matrice $S_{p,q}$, che abbiamo visto essere primitiva, ha un unico autovalore di modulo massimo, che abbiamo visto coincide con il numero 1, ed inoltre risulta

$$S_{p,q}^\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{p,q}^n = \mathbf{u}\mathbf{u}^T / \mathbf{u}^T \mathbf{u}$$

dove $\mathbf{u} = [1, 1, 1]^T$. Si ricava quindi:

$$S_{p,q}^\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{p,q}^n = \mathbf{u}\mathbf{u}^T / \mathbf{u}^T \mathbf{u} = 1/3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Si noti il fatto sorprendente:

$$S_{p,q}^\infty \text{ non dipende dai numeri positivi } p \text{ e } q;$$

pertanto denoteremo $S_{p,q}^\infty$ semplicemente con S^∞ . Però la velocità con cui le potenze della matrice $S_{p,q}$ convergono alla matrice S^∞ dipende da p e q .

Ad esempio si possono facilmente calcolare le due matrici $S_{1,1}^4$ e $S_{1,6}^4$:

$$S_{1,1}^4 = 1/16 \cdot \begin{bmatrix} 5 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad S_{1,6}^4 = 1/2401 \cdot \begin{bmatrix} 1320 & 865 & 216 \\ 216 & 1320 & 865 \\ 865 & 216 & 1320 \end{bmatrix}$$

da cui si vede che la prima matrice è molto vicina a S^∞ , mentre la seconda non lo è. Il lettore verifichi, a partire da un arbitrario triangolo ΔABC con matrice associata M , che l'(1:1)⁴-sottotriangolo è molto prossimo al baricentro, mentre l'(1:6)⁴-sottotriangolo non lo è (si veda la Figura 9).

Applichiamo il precedente teorema sulle matrici primitive alla successione dei sottotriangoli di un dato triangolo ΔABC che si ottengono prendendo iteratamente, a partire da ΔABC , il (p:q)-sottotriangolo del triangolo precedente, ovvero alla successione di (p:q)ⁿ-sottotriangoli.

TEOREMA 4. *Qualunque sia la scelta dei due numeri positivi p e q, la successione dei (p:q)ⁿ-sottotriangoli del triangolo ΔABC converge al triangolo degenere che si riduce al baricentro del triangolo stesso.*

Dim. Sia M la matrice associata al triangolo ΔABC . Il triangolo cui la successione converge ha matrice associata

$$\begin{aligned} M^\infty &= \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{p,q}^n M) = (\lim_{n \rightarrow \infty} S_{p,q}^n) M = S^\infty M = \\ &= 1/3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \\ x_C & y_C \end{bmatrix} = \\ &= 1/3 \cdot \begin{bmatrix} x_A+x_B+x_C & y_A+y_B+y_C \\ x_A+x_B+x_C & y_A+y_B+y_C \\ x_A+x_B+x_C & y_A+y_B+y_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_O & y_O \\ x_O & y_O \\ x_O & y_O \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(si veda la Figura 9).

Un risultato che si riallaccia ai precedenti Teoremi 2 e 3 è il seguente

TEOREMA 5. *Il (q:p)(p:q)-sottotriangolo di ΔABC è simile a ΔABC .*

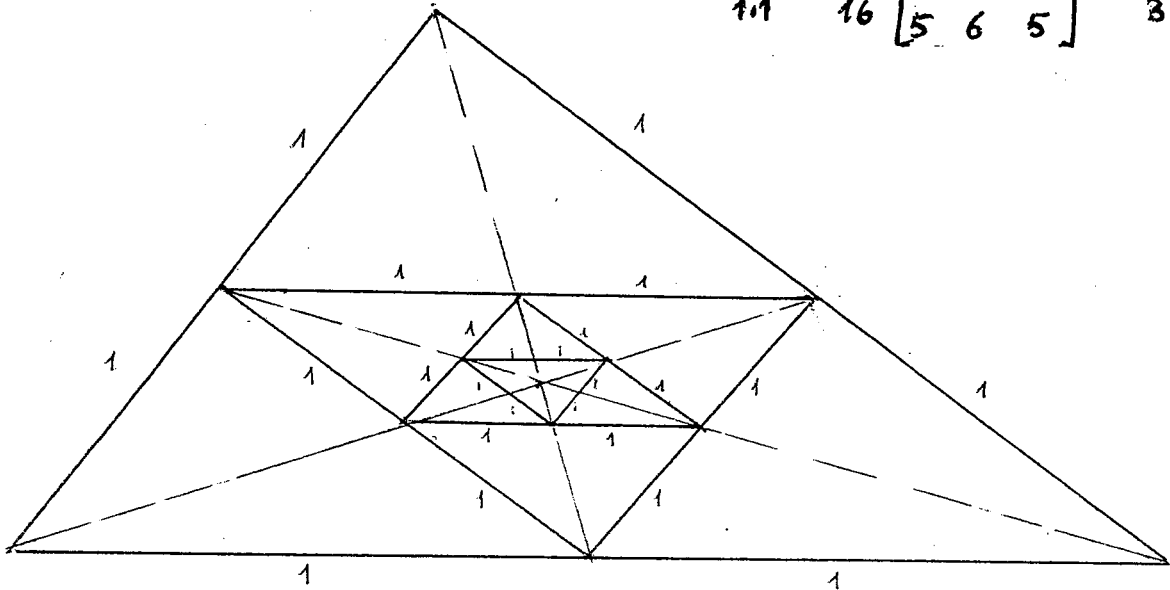
Dim. Le due matrici associate a ΔABC ed al suo (q:p)(p:q)-sottotriangolo siano rispettivamente

$$M = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M' = \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix}$$

Risulta allora $M' = S_{q,p} S_{p,q} M$, ovvero

$(1:1)^3$ -sottotriangolo

$$S_{1,1}^4 = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 5 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \end{bmatrix} \sim \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = S^c$$



$(1:6)^3$ -sottotriangolo

$$S_{1,6}^4 = \frac{1}{2401} \begin{bmatrix} 1320 & 865 & 216 \\ 216 & 1320 & 865 \\ 865 & 216 & 1320 \end{bmatrix} \neq S^c$$

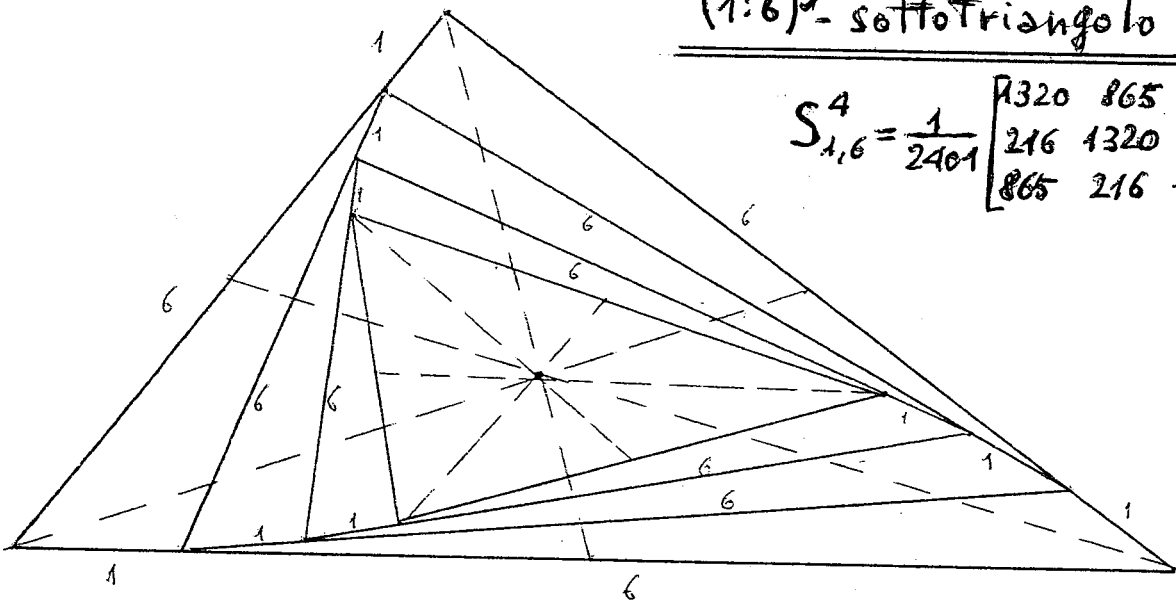


FIGURA 9

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}' \\ \mathbf{b}' \\ \mathbf{c}' \end{bmatrix} = (p+q)^{-2} \begin{bmatrix} pq & p^2+q^2 & pq \\ pq & pq & p^2+q^2 \\ p^2+q^2 & pq & pq \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (pqa+(p^2+q^2)\mathbf{b}+pq\mathbf{c})/(p+q)^2 \\ (pqa+pq\mathbf{b}+(p^2+q^2)\mathbf{c})/(p+q)^2 \\ ((p^2+q^2)\mathbf{a}+pq\mathbf{b}+pq\mathbf{c})/(p+q)^2 \end{bmatrix}$$

dove la matrice centrale che pre-moltiplica M non è altro che la matrice prodotto $S_{q,p} S_{p,q}$. Con un facile calcolo, avendo posto $\xi = (p^2 - pq + q^2) / (p+q)^2$, si vede che risulta:

$$\|\mathbf{a}'-\mathbf{b}'\| = \xi \|\mathbf{b}-\mathbf{c}\| ; \|\mathbf{b}'-\mathbf{c}'\| = \xi \|\mathbf{a}-\mathbf{c}\| ; \|\mathbf{a}'-\mathbf{c}'\| = \xi \|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|.$$

Quindi il $(q:p)(p:q)$ -sottotriangolo di ΔABC è simile al triangolo ΔABC stesso con un fattore di proporzionalità uguale a ξ (si veda la Figura 10).

Un risultato analogo al Teorema 4 è il seguente

TEOREMA 6. *Qualunque sia la scelta dei due numeri positivi p e q , la successione dei $[(q:p)(p:q)]^n$ -sottotriangoli del triangolo ΔABC converge al triangolo degenere che si riduce al baricentro del triangolo stesso.*

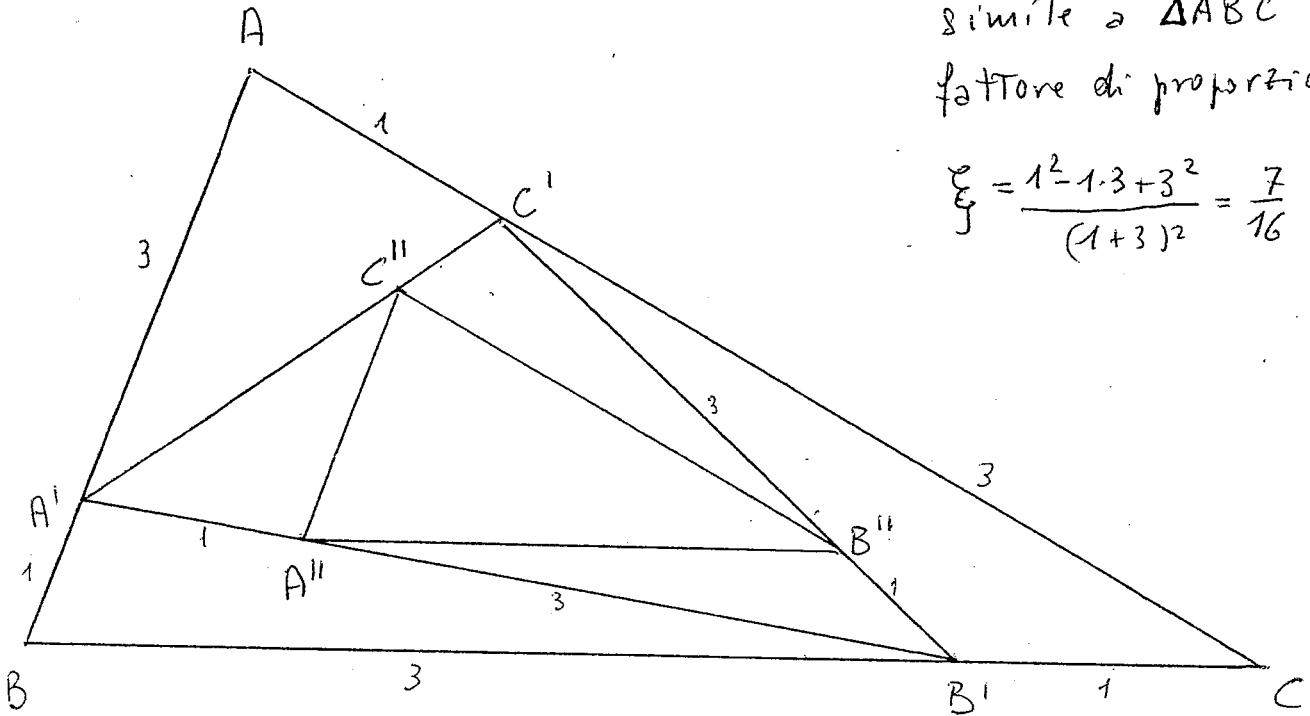
Dim. La matrice prodotto $S_{q,p} S_{p,q}$ nella dimostrazione del precedente teorema è doppiamente stocastica. Si applichi la dimostrazione del Teorema 4.

TEOREMA 5

(1:3)(3:1)-sottotriangolo $\Delta A''B''C''$

simile a ΔABC con
fattore di proporzionalità

$$\xi = \frac{1^2 - 1 \cdot 3 + 3^2}{(1+3)^2} = \frac{7}{16}$$



$$S_{1,3} \cdot S_{3,1} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 3 & 10 & 3 \\ 3 & 3 & 10 \\ 10 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

FIGURA 40