APPUNTI DI ALGEBRA LINEARE

1. Definizione Si dice *spazio vettoriale* (sul campo dei numeri reali $\mathcal{R}$) un insieme V per il quale siano definite l'operazione interna di *somma* (che ad ogni coppia di vettori $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ associa il vettore $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$) e l'operazione esterna detta *moltiplicazione scalare* (che ad ogni numero reale λ e ad ogni vettore $\boldsymbol{x}$ associa il vettore $\lambda\,\boldsymbol{x}$), soddisfacenti gli otto assiomi che seguono:

A1) $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$ per tutti i vettori $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$

A2) $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$ per tutti i vettori $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$

A3) esiste $\mathbf{0} \in V$ tale che $\boldsymbol{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ per tutti i vettori $\boldsymbol{x} \in V$

A4) per ogni $\boldsymbol{x} \in V$ esiste un elemento $\boldsymbol{x}' \in V$ tale che $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}' + \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

A5) $\lambda(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \lambda\,\boldsymbol{x} + \lambda\,\boldsymbol{y}$ per tutti i vettori $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$, per ogni scalare $\lambda \in \mathcal{R}$

A6) $(\lambda + \mu)\boldsymbol{x} = \lambda\,\boldsymbol{x} + \mu\,\boldsymbol{x}$ per ogni vettore $\boldsymbol{x} \in V$, per tutti gli scalari $\lambda, \mu \in \mathcal{R}$

A7) $(\lambda\mu)\boldsymbol{x} = \lambda(\mu\,\boldsymbol{x})$ per ogni vettore $\boldsymbol{x} \in V$, per tutti gli scalari $\lambda, \mu \in \mathcal{R}$

A8) $1\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ per ogni vettore $\boldsymbol{x} \in V$

Osservazione L'elemento neutro per la somma, il vettore nullo $\mathbf{0}$, è unico. L'elemento *opposto*, la cui esistenza è garantita dall'assioma A4, è, per ogni vettore dato, univocamente determinato.

2. Esempi Per ogni intero positivo n si consideri l'insieme delle ennuple reali:

$$\mathcal{R}^n = \{\, (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathcal{R} \,\}$$

All'insieme $\mathcal{R}^n$ si può dare struttura di spazio vettoriale definendo somma e moltiplicazione scalare tramite le relazioni

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

$$\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$$

per tutte le ennuple $(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathcal{R}^n$ e per ogni scalare $\lambda \in \mathcal{R}$.

Altri spazi vettoriali sono, per opportune operazioni che non esplicitiamo, l'insieme dei vettori geometrici (classi di equivalenza di segmenti orientati) dello spazio o del piano.

Il più 'piccolo' spazio vettoriale è l'insieme $\{\mathbf{0}\}$ che contiene soltanto il vettore nullo; tale spazio è detto *spazio nullo*.

Dati gli interi positivi m e n, si dice *matrice* (reale) a m righe e n colonne ogni collezione ordinata di numeri reali (x_{ij}), per $i = 1, 2, \ldots, m$ e $j = 1, 2, \ldots, n$. La notazione standard è

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ x_{m1} & x_{m2} & \ldots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

Nell’insieme delle matrici $m\times n$ (o di *ordine* (m,n)) si possono definire l’operazione di somma:

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ y_{m1} & y_{m2} & \dots & y_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11}+y_{11} & x_{12}+y_{12} & \dots & x_{1n}+y_{1n} \\ x_{21}+y_{22} & x_{22}+y_{22} & \dots & x_{2n}+y_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ x_{m1}+y_{m1} & x_{m2}+y_{m2} & \dots & x_{mn}+y_{mn} \end{bmatrix}$$

e di moltiplicazione scalare:

$$\lambda\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_{11} & \lambda x_{12} & \dots & \lambda x_{1n} \\ \lambda x_{21} & \lambda x_{22} & \dots & \lambda x_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ \lambda x_{m1} & x_{m2} & \dots & \lambda x_{mn} \end{bmatrix}$$

Con tali operazioni, l’insieme delle matrici $m\times n$ diviene uno spazio vettoriale (per ogni m, $n > 0$).

3. Teorema Se V è una spazio vettoriale su $\mathcal{R}$, allora

i) $0\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ per ogni vettore $\boldsymbol{x}\in$ V

ii) $(-1)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'$ per ogni vettore $\boldsymbol{x}\in$ V

iii) $\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$ per ogni scalare $\lambda\in\mathcal{R}$

Osservazione In virtù di *ii*), l’elemento opposto di $\boldsymbol{x}$, indicato con $\boldsymbol{x}'$, viene denotato con $-\boldsymbol{x}$.

4. Definizione Un sottoinsieme non vuoto X di uno spazio vettoriale V su $\mathcal{R}$ è un *sottospazio vettoriale* di V se, e solo se, X è uno spazio vettoriale su $\mathcal{R}$ rispetto alle operazioni ereditate da V.

5. Esempi Gli insiemi $\{(x_1, x_2,0) \mid x_1, x_2 \in\mathcal{R}\}$ e $\{(t, 3t,-t) \mid t \in\mathcal{R}\}$ sono sottospazi di $\mathcal{R}^3$. L’insieme $\{(0,0)\}$ è il sottospazio nullo di $\mathcal{R}^2$.

6. Teorema Un sottoinsieme X di V è un sottospazio vettoriale di V se, e solo se, X è chiuso per la somma e la moltiplicazione scalare, ossia se (e solo se)

$$\lambda\, \boldsymbol{x} + \mu\, \boldsymbol{y} \in \text{X}$$

per tutti i vettori $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\in$ X e per tutti gli scalari λ, $\mu\in\mathcal{R}$.

7. Definizione Dato un sottoinsieme X di V, si dice *sottospazio generato da X* il più piccolo sottospazio di V contenente X, ossia l’intersezione di tutti i sottospazi di V contenenti X. Tale sottospazio verrà denotato con $\langle \text{X} \rangle$.

Osservazione Se X è l’insieme vuoto, il sottospazio generato da X è lo spazio nullo: $\langle\varnothing\rangle = \{\mathbf{0}\}$. Se, invece, l’insieme X è non vuoto, allora si ha

$$\langle \text{X} \rangle = \{\boldsymbol{v}\in \text{V} \mid \exists m\in\mathcal{N}, \exists \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2,..., \boldsymbol{x}_m \in \text{X}, \exists\lambda_1, \lambda_2,..., \lambda_m \in\mathcal{R} \text{ tali che } \boldsymbol{v} = \lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \lambda_2\boldsymbol{x}_2 + ..., \lambda_m\boldsymbol{x}_m\ \}$$

8. Definizione I vettori $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2,\ldots,$ $\boldsymbol{x}_m$ si dicono *linearmente dipendenti* se, e solo se, esistono m scalari non tutti nulli $\lambda_1, \lambda_{2,\ldots,} \lambda_m \in \mathcal{R}$ tali che

$$\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 + \ldots + \lambda_m \boldsymbol{x}_m = \mathbf{0}$$

I vettori si dicono *linearmente indipendenti* se, e solo se, non sono linearmente dipendenti.

9. Esempi I vettori (0,6,12), (-6,0,6), (2,3,4), dello spazio $\mathcal{R}^3$ sono linearmente dipendenti. I vettori (1,0,1,0), (0,0,6,1), (2,1,0,-2) dello spazio $\mathcal{R}^4$ sono linearmente indipendenti.

10. Teorema I vettori $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2,\ldots,$ $\boldsymbol{x}_m$ sono *linearmente dipendenti* se, e solo se, esiste $k\in\{1,2,\ldots,m\}$ tale che il vettore $\boldsymbol{x}_k$ appartenga al sottospazio generato dai rimanenti $m-1$ vettori:

$$\boldsymbol{x}_k \in \langle \mathrm{X} \rangle \qquad \text{ove } \mathrm{X} = \{ \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2,\ldots, \boldsymbol{x}_m \} - \{ \boldsymbol{x}_k \}$$

11. Definizione Si dice *base* di uno spazio vettoriale V un sottoinsieme di vettori linearmente indipendenti che genera V.

12. Esempi L'insieme {(0,6,12), (-6,0,6), (2,3,4)} è una base dello spazio $\mathcal{R}^3$. Un'altra base di $\mathcal{R}^3$ è {(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)}. L'insieme {(2,0,3), (0,8,0), (-1,0,1), (5,6,7)} genera $\mathcal{R}^3$ ma non è costituito da vettori linearmente indipendenti.

13. Definizione Si dice *base canonica* dello spazio $\mathcal{R}^n$ l'insieme $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2,\ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ ove, per ogni $k = 1, 2,\ldots, n$ il vettore $\boldsymbol{e}_k$ ha uguali a zero tutte le componenti, con l'eccezione della k-esima, che è uguale a uno: $\boldsymbol{e}_k = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$. Per lo spazio $\mathcal{R}^4$, ad esempio, si ha $\boldsymbol{e}_1= (1,0,0,0)$, $\boldsymbol{e}_2= (0,2,0,0)$, $\boldsymbol{e}_3= (0,0,1,0)$, $\boldsymbol{e}_4= (0,0,0,1)$.

14. Teorema Tutte le basi di uno spazio vettoriale V hanno lo stesso numero di vettori.

15. Definizione Si dice *dimensione* dello spazio vettoriale V il numero di vettori contenuti in una base. La dimensione di V si denoterà con dimV.

16. Esempi La dimensione dello spazio $\mathcal{R}^n$ è pari a n. La dimensione dello spazio dei vettori geometrici del piano è 2. La dimensione dello spazio nullo è zero: $\dim\{\mathbf{0}\}= 0$.

17. Teorema Sia $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2,\ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ una base per lo spazio vettoriale V. Per ogni vettore $\boldsymbol{v}$ di V è univocamente determinata una ennupla di numeri reali $(\lambda_1, \lambda_{2,\ldots,} \lambda_n)$ tali che

$v = \lambda_1 \boldsymbol{b}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{b}_2 + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{b}_n$

I numeri reali $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ si dicono *componenti* di $\boldsymbol{v}$ rispetto alla base $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$.

18. Definizione Siano U e V spazi vettoriali su $\mathcal{R}$. Una funzione $f : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ si dice *trasformazione lineare* se, e solo se, sono soddisfatte le seguenti condizioni:

i) $f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$ per tutti i vettori $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathrm{U}$

ii) $f(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda f(\boldsymbol{x})$ per ogni vettore $\boldsymbol{x} \in \mathrm{U}$, per ogni scalare $\lambda \in \mathcal{R}$

19. Esempi La funzione $f : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^2$ definita dalla relazione $f(x_1, x_2) = (x_1+x_2, x_1-x_2)$. In generale, l'applicazione $f(x_1, x_2) = (ax_1+bx_2, cx_1+dx_2)$ è lineare per qualsiasi scelta dei parametri reali a, b, c, d. La funzione $g : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^3$ definita dalla relazione $g(x_1, x_2) = (x_1+x_2+1, x_1+2x_2, -x_1)$ non è lineare.

20. Teorema La funzione $f : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ è una trasformazione lineare se, e solo se:

$f(\lambda \boldsymbol{x} + \mu \boldsymbol{y}) = \lambda f(\boldsymbol{x}) + \mu f(\boldsymbol{y})$

per tutti i vettori $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathrm{U}$ e per tutti gli scalari $\lambda, \mu \in \mathcal{R}$.

21. Teorema Siano $f : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ e $g : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ trasformazioni lineari. Allora, la composizione $g \circ f : \mathrm{U} \to \mathrm{W}$ è una applicazione lineare.

22. Teorema Siano $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ e $\mathcal{B}' = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$ basi rispettivamente degli spazi vettoriali U e V e sia $f : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ una trasformazione lineare. Allora, esistono $m \times n$ numeri reali a_{ij}, ove $i = 1,2,\ldots,m$ e $j = 1,2,\ldots,n$, tali che

$$f(\lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{u}_2 + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{u}_n) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \lambda_j \right) \boldsymbol{v}_i$$

I coefficienti (a_{ij}), distribuiti in una tabella di m righe e n colonne, costituiscono la *matrice* di f, relativamente alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

23. Esempio L'applicazione $f : \mathcal{R}^3 \to \mathcal{R}^2$ definita da

$$f(x_1 \boldsymbol{u}_1 + x_2 \boldsymbol{u}_2 + x_3 \boldsymbol{u}_3) = (2x_1 - x_2)\mathbf{v}_1 + (x_1 + 4x_2 + 5x_3)\mathbf{v}_2$$

è la trasformazione lineare la cui matrice, relativamente alle basi $\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3\}$ di $\mathcal{R}^3$ e $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\}$ di $\mathcal{R}^2$, è

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Se $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ è la base canonica di $\mathcal{R}^3$ e $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ è la base canonica di $\mathcal{R}^2$, allora f si scrive

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2, x_1 + 4x_2 + 5x_3)$$

In forma matriciale, indicando come *vettori colonna* gli elementi di $\mathcal{R}^3$ e $\mathcal{R}^2$, si può scrivere

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Meno usata è la scrittura

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

in cui gli elementi di $\mathcal{R}^3$ e $\mathcal{R}^2$ sono *vettori riga*.

24. Definizione Nell'insieme di tutte le trasformazioni lineari da uno spazio U a uno spazio V si possono definire le operazioni di somma: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ e di moltiplicazione per uno scalare: $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$, per ogni $\lambda \in \mathcal{R}$ e per tutte le trasformazioni lineari $f, g : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$. La struttura algebrica risultante si denota con $\mathcal{L}(\mathrm{U},\mathrm{V})$.

25. Teorema La struttura $\mathcal{L}(\mathrm{U},\mathrm{V})$ è uno spazio vettoriale su $\mathcal{R}$ di dimensione mn, essendo n la dimensione di U e m la dimensione di V.

26. Definizione Se $\mathrm{A} = (a_{ij})$ è una matrice $m \times n$ e $\mathrm{B} = (b_{jk})$ è una matrice $n \times p$, si può definire il prodotto $\mathrm{C} = \mathrm{AB}$ (matrice $m \times p$) ponendo, per ogni $i = 1,2,\dots,n$ e per ogni $k = 1,2,\dots,p$

$$c_{ik} = \sum_{h=1}^{n} a_{ih} b_{hk}$$

Tale operazione si dice *prodotto righe per colonne*, perché, per determinare ciascun elemento c_{ik}, si sommano i prodotti, elemento per elemento, della riga i-esima riga di A: $\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{bmatrix}$

per la k-esima colonna di B: $\begin{bmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \dots \\ b_{nk} \end{bmatrix}$

27. Teorema Siano $f : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ e $g : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ trasformazioni lineari e siano A e B rispettivamente le matrici di f e g relativamente alle basi $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2,\dots, \boldsymbol{a}_n\}$ di U, $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2,\dots, \boldsymbol{b}_m\}$ di V e $\{\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2,\dots, \boldsymbol{c}_p\}$ di W. Allora, la trasformazione $g \circ f$ ha matrice $\mathrm{C} = \mathrm{BA}$.

28. Definizioni Una matrice di ordine (m,n) si dice *quadrata* (*di ordine n*) se $m = n$; in caso diverso, si dice *rettangolare*. Si dice *diagonale principale* di una matrice quadrata (x_{ij}), l'insieme degli elementi x_{ii}: $x_{11}, x_{22},\ldots, x_{nn}$. Gli elementi $x_{1n}, x_{2,n\text{-}1},\ldots, x_{k,n\text{-k}},\ldots, x_{n1}$ costituiscono, invece, la *diagonale secondaria*. Se gli elementi al di sopra della diagonale principale sono tutti nulli, la matrice si dice *triangolare inferiore*; se sono nulli gli elementi al di sotto della diagonale principale, la matrice si dice *triangolare superiore*; se tutti gli elementi distinti dalla diagonale principale sono nulli, la matrice si dice *diagonale*. La matrice quadrata di ordine n I_n, che ha ogni elemento della diagonale principale uguale a uno, e tutti gli altri uguali a zero, si dice *matrice unità* o *identica* (di ordine n). Si scrive $\mathrm{I}_n = (\delta_{ij})$, ove δ_{ij}, detto *delta di Kronecker*, è definito dalle relazioni

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & se\ i = j \\ 0 & se\ i \neq j \end{cases} \qquad \text{per } i = j = 1,2\ldots,n.$$

29. Esempi La matrice $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 6 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ è quadrata, di ordine 3. La diagonale principale è costituita dagli elementi 3,5,4, quella secondaria dagli elementi 2,5,0. Le seguenti matrici sono rispettivamente triangolare inferiore, triangolare superiore, diagonale, matrice identica di ordine 3:

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

30. Definizione Si dice *matrice trasposta* della matrice $\mathrm{A} = (a_{ij})$, la matrice che si ottiene da A scambiando le righe con le colonne. Tale matrice si denota con A^{T}. Se indichiamo con (b_{ij}) gli elementi di A^{T}, valgono le relazioni

$$b_{hk} = a_{kh} \qquad \text{per ogni } h = 1,2\ldots,m, \text{ e per ogni } k = 1,2\ldots,n.$$

31. Esempio La matrice $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ ha per trasposta la matrice $\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

32. Definizioni Dato l'insieme A, si dice *permutazione* di A ogni funzione σ: A $\to$ A che risulti biunivoca. Si dice *ordine* della permutazione σ il più piccolo intero positivo k tale che $\sigma^k = i$, ove i è l'identità di A. (Se l'insieme A è finito, l'ordine k è sempre ben definito.) La permutazione si dice *pari* se k è pari, *dispari* in caso contrario.

33. Definizione Si dice *determinante* della matrice quadrata $\mathrm{A} = (a_{ij})$, il numero reale

$$Det(\mathrm{A}) = \sum_{\sigma \in \Pi(n)} (-1)^{segn(\sigma)} a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \ldots a_{n,\sigma(n)}$$

ove $\Pi(n)$ è l'insieme delle permutazioni dei numeri $\{1, 2, \dots, n\}$ e $segn(n)$ è la funzione, definita in $\Pi(n)$ che vale 0 se σ è una permutazione pari e 1 se σ è una permutazione dispari.

34. Teorema Se A e B sono matrici quadrate di ordine n, si ha $Det(AB) = Det(A)Det(B)$.

35. Teorema Se A è una matrice quadrata e A^T è la sua trasposta, si ha $Det(A^T) = Det(A)$.

36. Definizione La matrice quadrata A, di ordine n, si dice *invertibile* se, e solo se, esiste una matrice quadrata di ordine n, che si denota con A^{-1}, tale che $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

37. Teorema La matrice quadrata A è invertibile se, e solo se, $Det(A) \neq 0$.

38. Teorema Se A è una matrice invertibile allora, $Det(A^{-1}) = 1/Det(A)$.

39. Teorema Una trasformazione lineare f è invertibile se, e solo se, la matrice di f, relativamente a una qualsiasi coppia di basi, ha determinante non nullo.

40. Definizioni Data la matrice quadrata di ordine n $A = (a_{ij})$, per ogni i e per ogni j si può considerare la matrice quadrata, di ordine $n-1$, ottenuta eliminando da A la i-esima riga e la j-esima colonna. Il determinante di tale matrice si dice *minore complementare* di a_{ij} e sarà denotato con C_{ij}. Si dice *complemento algebrico* dell'elemento a_{ij} la quantità $A_{ij} = (-1)^{i+j} C_{ij}$.

41. Teorema Data una matrice quadrata $A = (a_{ij})$ di ordine n, si ha, per ogni $i = 1, 2, \dots, n$,

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} = Det(\mathrm{A}) .$$

Inoltre, per $i \neq j$, risulta

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = 0 .$$

42. Teorema Sia $A = (a_{ij})$ una matrice quadrata invertibile di ordine n. Posto $A^{-1} = (b_{ij})$, si ha, per ogni i e per ogni j:

$$b_{ij} = \frac{\mathrm{A}_{ji}}{Det(\mathrm{A})}$$

ove A_{ji} è il complemento algebrico di a_{ji}.

ESERCIZI

1. Verificare se i seguenti sono insiemi di vettori linearmente dipendenti o indipendenti:

i) $\boldsymbol{a} = (1,0,4)$, $\boldsymbol{b} = (-1,3,0)$ *ii*) $\boldsymbol{a} = (0,2,1)$, $\boldsymbol{b} = (2/3,0,1)$, $\boldsymbol{c} = (1,-1,1)$.

2. Verificare se i seguenti sono insiemi di generatori dello spazio vettoriale $\mathcal{R}^2$:

i) $\boldsymbol{a} = (1,0)$, $\boldsymbol{b} = (-1,3)$ *ii*) $\boldsymbol{a} = (2,5)$, $\boldsymbol{b} = (0,7)$, $\boldsymbol{c} = (-1,3)$.

3. Verificare che i vettori $\boldsymbol{a} = (3,0,2)$ e $\boldsymbol{b} = (2,1,1)$ sono linearmente indipendenti e trovare un vettore $\boldsymbol{c}$ tale che $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ sia una base di $\mathcal{R}^3$.

4. Determinare le componenti del vettore (3,4) rispetto alla base $\boldsymbol{b}_1 = (1,2)$, $\boldsymbol{b}_2 = (-1,3)$.

5. Determinare le componenti del vettore (x,y) rispetto alla base $\boldsymbol{b}_1 = (1,2)$, $\boldsymbol{b}_2 = (-1,3)$.

6. Determinare le componenti del vettore (x,y,z) rispetto alla base $\boldsymbol{b}_1 = (1,0,1)$, $\boldsymbol{b}_2 = (-1,0,0)$, $\boldsymbol{b}_3 = (1,1,0)$.

7. Indichiamo con $\mathcal{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ la base canonica dello spazio vettoriale $\mathcal{R}^2$ e con $\mathcal{U} = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ l'insieme dei vettori $\boldsymbol{u}_1 = 2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2$.

i) Verificare che $\mathcal{U}$ è una base di $\mathcal{R}^2$.

ii) La matrice dell'applicazione lineare $f : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^2$, relativamente alle basi canoniche di dominio e codominio è $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Determinare la matrice B di f rispetto alle basi $\mathcal{U}$ (per il dominio) ed $\mathcal{E}$ (per il codominio).

iii) Determinare la matrice di f rispetto alle basi $\mathcal{U}$ (per il dominio) e $\mathcal{U}$ (per il codominio).

iv) La matrice dell'applicazione lineare $g : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^2$, relativamente alle basi $\mathcal{U}$ (per il dominio) e $\mathcal{U}$ (per il codominio), è $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Determinare la matrice D di g rispetto alle basi canoniche.

8. È data la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

i) Verificare che $Det(A) \neq 0$ e trovare la matrice inversa A^{-1}.

ii) Calcolare A^2 e A^3. Verificare che si ha $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$ e $(A^3)^{-1} = (A^{-1})^3$.

9. È data la matrice $L = \begin{bmatrix} 2/3 & 2/3 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}$. Determinare tutte le matrici X tali che XL = LX = X.