# Un metodo per il calcolo di $\pi$

**Progetto Lauree Scientifiche**

Liceo “G. Marconi” - Conegliano

20 febbraio 2017

*Molta osservazione e poco ragionamento conducono alla verità*

A. Carrel, premio Nobel per la medicina nel 1910

- $\pi/6$ è *l'unica* soluzione dell'equazione $\sin(x) = 1/2$ in $[0, \pi/4]$
- Per ogni $x \in [0, \pi/4]$ vale

$$\left|T_{2n+1}(x) - \sin x\right| \leq \frac{1}{(2n+2)!}\left(\frac{4}{5}\right)^{2n+2}$$

dove

$$T_{2n+1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

- Il metodo di Newton converge molto velocemente: se $T_{2n+1}(\xi) = 1/2$

$$|x_k - \xi| \lesssim |x_0 - \xi|^{2^k}, \qquad x_k = x_{k-1} - \frac{T_{2n+1}(x_{k-1}) - 1/2}{T'_{2n+1}(x_{k-1})}$$

Risolviamo $T_{2n+1}(x) = 1/2$ in $[0, \pi/4]$ con il metodo di Newton $\Rightarrow$ $6x_k \approx \pi$

# L'idea che vogliamo utilizzare

*Molta osservazione e poco ragionamento conducono alla verità*

A. Carrel, premio Nobel per la medicina nel 1910

- $\pi/6$ è *l'unica* soluzione dell'equazione $\sin(x) = 1/2$ in $[0, \pi/4]$
- Per ogni $x \in [0, \pi/4]$ vale

$$\left|T_{2n+1}(x) - \sin x\right| \leq \frac{1}{(2n+2)!}\left(\frac{4}{5}\right)^{2n+2}$$

dove

$$T_{2n+1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

- Il metodo di Newton converge molto velocemente: se $T_{2n+1}(\xi) = 1/2$

$$\left|x_k - \xi\right| \lesssim \left|x_0 - \xi\right|^{2^k}, \qquad x_k = x_{k-1} - \frac{T_{2n+1}(x_{k-1}) - 1/2}{T'_{2n+1}(x_{k-1})}$$

Risolviamo $T_{2n+1}(x) = 1/2$ in $[0, \pi/4]$ con il metodo di Newton $\Rightarrow$ $6x_k \approx \pi$

*Molta osservazione e poco ragionamento conducono alla verità*

A. Carrel, premio Nobel per la medicina nel 1910

- $\pi/6$ è *l'unica* soluzione dell'equazione $\sin(x) = 1/2$ in $[0, \pi/4]$
- Per ogni $x \in [0, \pi/4]$ vale

$$\left|T_{2n+1}(x) - \sin x\right| \leq \frac{1}{(2n+2)!}\left(\frac{4}{5}\right)^{2n+2}$$

dove

$$T_{2n+1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

- Il metodo di Newton converge molto velocemente: se $T_{2n+1}(\xi) = 1/2$

$$\left|x_k - \xi\right| \lesssim \left|x_0 - \xi\right|^{2^k}, \qquad x_k = x_{k-1} - \frac{T_{2n+1}(x_{k-1}) - 1/2}{T'_{2n+1}(x_{k-1})}$$

Risolviamo $T_{2n+1}(x) = 1/2$ in $[0, \pi/4]$ con il metodo di Newton $\Rightarrow$ $6x_k \approx \pi$

*Molta osservazione e poco ragionamento conducono alla verità*

A. Carrel, premio Nobel per la medicina nel 1910

- $\pi/6$ è *l'unica* soluzione dell'equazione $\sin(x) = 1/2$ in $[0, \pi/4]$
- Per ogni $x \in [0, \pi/4]$ vale

$$\left|T_{2n+1}(x) - \sin x\right| \leq \frac{1}{(2n+2)!}\left(\frac{4}{5}\right)^{2n+2}$$

dove

$$T_{2n+1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

- Il metodo di Newton converge molto velocemente: se $T_{2n+1}(\xi) = 1/2$

$$|x_k - \xi| \lesssim |x_0 - \xi|^{2^k}, \qquad x_k = x_{k-1} - \frac{T_{2n+1}(x_{k-1}) - 1/2}{T'_{2n+1}(x_{k-1})}$$

Risolviamo $T_{2n+1}(x) = 1/2$ in $[0, \pi/4]$ con il metodo di Newton $\Rightarrow$ $6x_k \approx \pi$

# L'idea che vogliamo utilizzare

*Molta osservazione e poco ragionamento conducono alla verità*

A. Carrel, premio Nobel per la medicina nel 1910

- $\pi/6$ è *l'unica* soluzione dell'equazione $\sin(x) = 1/2$ in $[0, \pi/4]$
- Per ogni $x \in [0, \pi/4]$ vale

$$\left| T_{2n+1}(x) - \sin x \right| \leq \frac{1}{(2n+2)!} \left( \frac{4}{5} \right)^{2n+2}$$

dove

$$T_{2n+1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

- Il metodo di Newton converge molto velocemente: se $T_{2n+1}(\xi) = 1/2$

$$\left| x_k - \xi \right| \lesssim \left| x_0 - \xi \right|^{2^k}, \qquad x_k = x_{k-1} - \frac{T_{2n+1}(x_{k-1}) - 1/2}{T'_{2n+1}(x_{k-1})}$$

Risolviamo $T_{2n+1}(x) = 1/2$ in $[0, \pi/4]$ con il metodo di Newton $\Rightarrow$ $6x_k \approx \pi$

*Molta osservazione e poco ragionamento conducono alla verità*

A. Carrel, premio Nobel per la medicina nel 1910

- $\pi/6$ è *l'unica* soluzione dell'equazione $\sin(x) = 1/2$ in $[0, \pi/4]$
- Per ogni $x \in [0, \pi/4]$ vale

$$\left|T_{2n+1}(x) - \sin x\right| \leq \frac{1}{(2n+2)!}\left(\frac{4}{5}\right)^{2n+2}$$

dove

$$T_{2n+1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

- Il metodo di Newton converge molto velocemente: se $T_{2n+1}(\xi) = 1/2$

$$\left|x_k - \xi\right| \lesssim \left|x_0 - \xi\right|^{2^k}, \qquad x_k = x_{k-1} - \frac{T_{2n+1}(x_{k-1}) - 1/2}{T'_{2n+1}(x_{k-1})}$$

Risolviamo $T_{2n+1}(x) = 1/2$ in $[0, \pi/4]$ con il metodo di Newton $\Rightarrow$ $6x_k \approx \pi$

# Scelta di $n$ e $k$

Dobbiamo trovare

- il grado $2n+1$ del polinomio da utilizzare
- il passo $k$ a cui ci fermiamo nel metodo di Newton

Il grado $2n+1$ ed il passo $k$ devono essere tali che

$$\left|6x_k - \pi\right| < \mathtt{Err} \quad \Longleftrightarrow \quad \left|x_k - \pi/6\right| < \mathtt{Err}/6$$

con $\mathtt{Err}$ fissato

- Se $T_{2n+1}(\xi) = 1/2$

$$\left|x_k - \pi/6\right| \leq \underbrace{\left|x_k - \xi\right|}_{\text{decide } k} + \underbrace{\left|\xi - \pi/6\right|}_{\text{decide } n} < \mathtt{Err}/6$$

Due cose da fare

1. Dobbiamo stimare $\left|\xi - \pi/6\right|$ e trovare $n$ in modo che
$$\left|\xi - \pi/6\right| < \mathtt{Err}/12$$
2. Preso $x_0 = 0$, dobbiamo stimare $\left|x_k - \xi\right|$ e trovare $k$ in modo che
$$\left|x_k - \xi\right| < \mathtt{Err}/12$$

# Scelta di $n$ e $k$

Dobbiamo trovare

- il grado $2n+1$ del polinomio da utilizzare
- il passo $k$ a cui ci fermiamo nel metodo di Newton

Il grado $2n+1$ ed il passo $k$ devono essere tali che

$$\left|6x_k - \pi\right| < \mathtt{Err} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left|x_k - \pi/6\right| < \mathtt{Err}/6$$

con $\mathtt{Err}$ fissato

- Se $T_{2n+1}(\xi) = 1/2$

$$\left|x_k - \pi/6\right| \leq \underbrace{\left|x_k - \xi\right|}_{\text{decide } k} + \underbrace{\left|\xi - \pi/6\right|}_{\text{decide } n} < \mathtt{Err}/6$$

Due cose da fare

1. Dobbiamo stimare $\left|\xi - \pi/6\right|$ e trovare $n$ in modo che

$$\left|\xi - \pi/6\right| < \mathtt{Err}/12$$

2. Preso $x_0 = 0$, dobbiamo stimare $\left|x_k - \xi\right|$ e trovare $k$ in modo che

$$\left|x_k - \xi\right| < \mathtt{Err}/12$$

# Scelta di $n$ e $k$

Dobbiamo trovare

- il grado $2n+1$ del polinomio da utilizzare
- il passo $k$ a cui ci fermiamo nel metodo di Newton

Il grado $2n+1$ ed il passo $k$ devono essere tali che

$$\left|6x_k - \pi\right| < \mathtt{Err} \quad \Longleftrightarrow \quad \left|x_k - \pi/6\right| < \mathtt{Err}/6$$

con $\mathtt{Err}$ fissato

- Se $T_{2n+1}(\xi) = 1/2$

$$\left|x_k - \pi/6\right| \leq \underbrace{\left|x_k - \xi\right|}_{\text{decide } k} + \underbrace{\left|\xi - \pi/6\right|}_{\text{decide } n} < \mathtt{Err}/6$$

Due cose da fare

1. Dobbiamo stimare $\left|\xi - \pi/6\right|$ e trovare $n$ in modo che

$$\left|\xi - \pi/6\right| < \mathtt{Err}/12$$

2. Preso $x_0 = 0$, dobbiamo stimare $\left|x_k - \xi\right|$ e trovare $k$ in modo che

$$\left|x_k - \xi\right| < \mathtt{Err}/12$$

Dobbiamo trovare

- il grado $2n+1$ del polinomio da utilizzare
- il passo $k$ a cui ci fermiamo nel metodo di Newton

Il grado $2n+1$ ed il passo $k$ devono essere tali che

$$|6x_k - \pi| < \mathtt{Err} \quad \Longleftrightarrow \quad |x_k - \pi/6| < \mathtt{Err}/6$$

con `Err` fissato

- Se $T_{2n+1}(\xi) = 1/2$

$$|x_k - \pi/6| \leq \underbrace{|x_k - \xi|}_{\text{decide } k} + \underbrace{|\xi - \pi/6|}_{\text{decide } n} < \mathtt{Err}/6$$

Due cose da fare

1. Dobbiamo stimare $|\xi - \pi/6|$ e trovare $n$ in modo che

$$|\xi - \pi/6| < \mathtt{Err}/12$$

2. Preso $x_0 = 0$, dobbiamo stimare $|x_k - \xi|$ e trovare $k$ in modo che

$$|x_k - \xi| < \mathtt{Err}/12$$

# Scelta di $n$ e $k$

Dobbiamo trovare

- il grado $2n+1$ del polinomio da utilizzare
- il passo $k$ a cui ci fermiamo nel metodo di Newton

Il grado $2n+1$ ed il passo $k$ devono essere tali che

$$\left|6x_k - \pi\right| < \mathtt{Err} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left|x_k - \pi/6\right| < \mathtt{Err}/6$$

con $\mathtt{Err}$ fissato

- Se $T_{2n+1}(\xi) = 1/2$

$$\left|x_k - \pi/6\right| \leq \underbrace{\left|x_k - \xi\right|}_{\text{decide } k} + \underbrace{\left|\xi - \pi/6\right|}_{\text{decide } n} < \mathtt{Err}/6$$

Due cose da fare

1. Dobbiamo stimare $\left|\xi - \pi/6\right|$ e trovare $n$ in modo che
$$\left|\xi - \pi/6\right| < \mathtt{Err}/12$$

2. Preso $x_0 = 0$, dobbiamo stimare $\left|x_k - \xi\right|$ e trovare $k$ in modo che
$$\left|x_k - \xi\right| < \mathtt{Err}/12$$

# Stima di $\left|\xi - \pi/6\right|$

1. Per $n \geq 1$ si ha
$$T_{2n+1}(0) < \frac{1}{2} < T_{2n+1}(\pi/4)$$
$$T'_{2n+1}(x) \geq 1/2 \quad \forall x \in [0, \pi/4]$$
e quindi esiste *un'unica* soluzione $\xi$ di $T_{2n+1}(x) = 1/2$ in $[0, \pi/4]$
2. Per il teorema di Lagrange troviamo $\eta \in [0, \pi/4]$ tale che
$$T_{2n+1}(\xi) - T_{2n+1}(\pi/6) = T'_{2n+1}(\eta)(\xi - \pi/6)$$
3. Poiché $T_{2n+1}(\xi) = 1/2 = \sin(\pi/6)$, si ottiene
$$\left|\xi - \pi/6\right| = \frac{\left|T_{2n+1}(\xi) - T_{2n+1}(\pi/6)\right|}{\left|T'_{2n+1}(\eta)\right|} = \frac{\left|\sin(\pi/6) - T_{2n+1}(\pi/6)\right|}{\left|T'_{2n+1}(\eta)\right|}$$
$$\leq 2\left|\sin(\pi/6) - T_{2n+1}(\pi/6)\right| \leq \frac{2}{(2n+2)!}\left(\frac{4}{5}\right)^{2n+2}$$
4. A questo punto fissiamo $n$ in modo che
$$\frac{2}{(2n+2)!}\left(\frac{4}{5}\right)^{2n+2} < \mathtt{Err}/12$$

# Stima di $|\xi - \pi/6|$

1. Per $n \geq 1$ si ha
$$T_{2n+1}(0) < \frac{1}{2} < T_{2n+1}(\pi/4)$$
$$T'_{2n+1}(x) \geq 1/2 \quad \forall x \in [0, \pi/4]$$
e quindi esiste *un'unica* soluzione $\xi$ di $T_{2n+1}(x) = 1/2$ in $[0, \pi/4]$

2. Per il teorema di Lagrange troviamo $\eta \in [0, \pi/4]$ tale che
$$T_{2n+1}(\xi) - T_{2n+1}(\pi/6) = T'_{2n+1}(\eta)(\xi - \pi/6)$$

3. Poiché $T_{2n+1}(\xi) = 1/2 = \sin(\pi/6)$, si ottiene
$$|\xi - \pi/6| = \frac{|T_{2n+1}(\xi) - T_{2n+1}(\pi/6)|}{|T'_{2n+1}(\eta)|} = \frac{|\sin(\pi/6) - T_{2n+1}(\pi/6)|}{|T'_{2n+1}(\eta)|}$$
$$\leq 2|\sin(\pi/6) - T_{2n+1}(\pi/6)| \leq \frac{2}{(2n+2)!}\left(\frac{4}{5}\right)^{2n+2}$$

4. A questo punto fissiamo $n$ in modo che
$$\frac{2}{(2n+2)!}\left(\frac{4}{5}\right)^{2n+2} < \mathtt{Err}/12$$

1. Per $n \geq 1$ si ha
$$T_{2n+1}(0) < \frac{1}{2} < T_{2n+1}(\pi/4)$$
$$T'_{2n+1}(x) \geq 1/2 \quad \forall x \in [0, \pi/4]$$
e quindi esiste *un'unica* soluzione $\xi$ di $T_{2n+1}(x) = 1/2$ in $[0, \pi/4]$

2. Per il teorema di Lagrange troviamo $\eta \in [0, \pi/4]$ tale che
$$T_{2n+1}(\xi) - T_{2n+1}(\pi/6) = T'_{2n+1}(\eta)(\xi - \pi/6)$$

3. Poiché $T_{2n+1}(\xi) = 1/2 = \sin(\pi/6)$, si ottiene
$$|\xi - \pi/6| = \frac{|T_{2n+1}(\xi) - T_{2n+1}(\pi/6)|}{|T'_{2n+1}(\eta)|} = \frac{|\sin(\pi/6) - T_{2n+1}(\pi/6)|}{|T'_{2n+1}(\eta)|}$$
$$\leq 2|\sin(\pi/6) - T_{2n+1}(\pi/6)| \leq \frac{2}{(2n+2)!}\left(\frac{4}{5}\right)^{2n+2}$$

4. A questo punto fissiamo $n$ in modo che
$$\frac{2}{(2n+2)!}\left(\frac{4}{5}\right)^{2n+2} < \mathtt{Err}/12$$

1. Per $n \geq 1$ si ha
$$T_{2n+1}(0) < \frac{1}{2} < T_{2n+1}(\pi/4)$$
$$T'_{2n+1}(x) \geq 1/2 \quad \forall x \in [0, \pi/4]$$
e quindi esiste *un'unica* soluzione $\xi$ di $T_{2n+1}(x) = 1/2$ in $[0, \pi/4]$
2. Per il teorema di Lagrange troviamo $\eta \in [0, \pi/4]$ tale che
$$T_{2n+1}(\xi) - T_{2n+1}(\pi/6) = T'_{2n+1}(\eta)(\xi - \pi/6)$$
3. Poiché $T_{2n+1}(\xi) = 1/2 = \sin(\pi/6)$, si ottiene
$$|\xi - \pi/6| = \frac{|T_{2n+1}(\xi) - T_{2n+1}(\pi/6)|}{|T'_{2n+1}(\eta)|} = \frac{|\sin(\pi/6) - T_{2n+1}(\pi/6)|}{|T'_{2n+1}(\eta)|}$$
$$\leq 2|\sin(\pi/6) - T_{2n+1}(\pi/6)| \leq \frac{2}{(2n+2)!}\left(\frac{4}{5}\right)^{2n+2}$$
4. A questo punto fissiamo $n$ in modo che
$$\frac{2}{(2n+2)!}\left(\frac{4}{5}\right)^{2n+2} < \mathtt{Err}/12$$

1. Dal metodo di Newton

$$|x_k - \xi| \le \frac{1}{2} \left| \frac{T''_{2n+1}(\mu)}{T'_{2n+1}(x_{k-1})} \right| |x_{k-1} - \xi|^2$$

per qualche $\mu \in [0, \pi/4]$

2. Per $n \ge 1$ per ogni $x \in [0, \pi/4]$ si ha

$$|T''_{2n+1}(x)| \le 1\,, \qquad T'_{2n+1}(x) \ge 1/2$$

e quindi

$$\frac{1}{2} \left| \frac{T''_{2n+1}(\mu)}{T'_{2n+1}(x_{k-1})} \right| \le 1$$

3. Allora, preso $x_0 = 0$,

$$|x_k - \xi| \le |x_{k-1} - \xi|^2 \le \cdots \le |\xi - x_0|^{2^k} \le \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2^k} \le \left(\frac{4}{5}\right)^{2^k}$$

4. Fissiamo $k$ in modo che

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{2^k} < \mathtt{Err}/12$$

1. Dal metodo di Newton

$$|x_k - \xi| \leq \frac{1}{2} \left| \frac{T''_{2n+1}(\mu)}{T'_{2n+1}(x_{k-1})} \right| |x_{k-1} - \xi|^2$$

per qualche $\mu \in [0, \pi/4]$

2. Per $n \geq 1$ per ogni $x \in [0, \pi/4]$ si ha

$$\left|T''_{2n+1}(x)\right| \leq 1\,, \qquad T'_{2n+1}(x) \geq 1/2$$

e quindi

$$\frac{1}{2} \left| \frac{T''_{2n+1}(\mu)}{T'_{2n+1}(x_{k-1})} \right| \leq 1$$

3. Allora, preso $x_0 = 0$,

$$|x_k - \xi| \leq |x_{k-1} - \xi|^2 \leq \cdots \leq |\xi - x_0|^{2^k} \leq \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2^k} \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{2^k}$$

4. Fissiamo $k$ in modo che

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{2^k} < \mathtt{Err}/12$$

# Stima di $|x_k - \xi|$

1. Dal metodo di Newton

$$|x_k - \xi| \le \frac{1}{2}\left|\frac{T''_{2n+1}(\mu)}{T'_{2n+1}(x_{k-1})}\right| |x_{k-1} - \xi|^2$$

   per qualche $\mu \in [0, \pi/4]$

2. Per $n \ge 1$ per ogni $x \in [0, \pi/4]$ si ha

$$\left|T''_{2n+1}(x)\right| \le 1\,, \qquad T'_{2n+1}(x) \ge 1/2$$

   e quindi

$$\frac{1}{2}\left|\frac{T''_{2n+1}(\mu)}{T'_{2n+1}(x_{k-1})}\right| \le 1$$

3. Allora, preso $x_0 = 0$,

$$|x_k - \xi| \le |x_{k-1} - \xi|^2 \le \cdots \le |\xi - x_0|^{2^k} \le \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2^k} \le \left(\frac{4}{5}\right)^{2^k}$$

4. Fissiamo $k$ in modo che

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{2^k} < \mathtt{Err}/12$$

1. Dal metodo di Newton

$$|x_k - \xi| \le \frac{1}{2}\left|\frac{T''_{2n+1}(\mu)}{T'_{2n+1}(x_{k-1})}\right| |x_{k-1} - \xi|^2$$

   per qualche $\mu \in [0, \pi/4]$

2. Per $n \ge 1$ per ogni $x \in [0, \pi/4]$ si ha

$$|T''_{2n+1}(x)| \le 1\,, \qquad T'_{2n+1}(x) \ge 1/2$$

   e quindi

$$\frac{1}{2}\left|\frac{T''_{2n+1}(\mu)}{T'_{2n+1}(x_{k-1})}\right| \le 1$$

3. Allora, preso $x_0 = 0$,

$$|x_k - \xi| \le |x_{k-1} - \xi|^2 \le \cdots \le |\xi - x_0|^{2^k} \le \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2^k} \le \left(\frac{4}{5}\right)^{2^k}$$

4. Fissiamo $k$ in modo che

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{2^k} < \mathtt{Err}/12$$

Fissiamo $\mathtt{Err} = 10^{-p}$, cioè vogliamo trovare $p$ cifre decimali esatte di $\pi$

Allora

1. Scegliamo $n$ in modo che
$$\frac{2}{(2n+2)!}\left(\frac{4}{5}\right)^{2n+2} < \frac{10^{-p}}{12}$$

2. Scegliamo $k$ in modo che
$$\left(\frac{4}{5}\right)^{2^k} < \frac{10^{-p}}{12}$$

Ad esempio

- $p = 6$: $\quad n = 4$, $k = 7$
- $p = 8$: $\quad n = 5$, $k = 7$
- $p = 14$: $\quad n = 8$, $k = 8$

Fissiamo $\texttt{Err} = 10^{-p}$, cioè vogliamo trovare $p$ cifre decimali esatte di $\pi$

Allora

1. Scegliamo $n$ in modo che

$$\frac{2}{(2n+2)!}\left(\frac{4}{5}\right)^{2n+2} < \frac{10^{-p}}{12}$$

2. Scegliamo $k$ in modo che

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{2^k} < \frac{10^{-p}}{12}$$

Ad esempio

- $p = 6$: $\quad n = 4, k = 7$
- $p = 8$: $\quad n = 5, k = 7$
- $p = 14$: $\quad n = 8, k = 8$

# Scelta di $n$ e $k$

Fissiamo $\mathtt{Err} = 10^{-p}$, cioè vogliamo trovare $p$ cifre decimali esatte di $\pi$

Allora

1. Scegliamo $n$ in modo che

$$\frac{2}{(2n+2)!}\left(\frac{4}{5}\right)^{2n+2} < \frac{10^{-p}}{12}$$

2. Scegliamo $k$ in modo che

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{2^k} < \frac{10^{-p}}{12}$$

Ad esempio

- $p = 6$: $n = 4$, $k = 7$
- $p = 8$: $n = 5$, $k = 7$
- $p = 14$: $n = 8$, $k = 8$

## Scelta di $n$ e $k$

Fissiamo $\texttt{Err} = 10^{-p}$, cioè vogliamo trovare $p$ cifre decimali esatte di $\pi$

Allora

1. Scegliamo $n$ in modo che

$$\frac{2}{(2n+2)!}\left(\frac{4}{5}\right)^{2n+2} < \frac{10^{-p}}{12}$$

2. Scegliamo $k$ in modo che

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{2^k} < \frac{10^{-p}}{12}$$

Ad esempio

- $p = 6$: $\quad n = 4$, $k = 7$
- $p = 8$: $\quad n = 5$, $k = 7$
- $p = 14$: $\quad n = 8$, $k = 8$